R

Ad Bibliothecam
Canoniæ SS. Apoſt. Petri & Pauli
in Weyarn
comparavit
P. VALENTINUS HANSCH Conventualis ibid.

TITULUS SCRINII.	SERIES.	NUMERUS.

<36604921680010

<36604921680010

Bayer. Staatsbibliothek

Math Un 77 IV, 7

Mathesis Systemata et methodi

127.

Anfangsgründe der höhern Mechanik

welche

von der Bewegung fester Körper

besonders

die praktischen Lehren

enthalten.

Abgefaßt

von

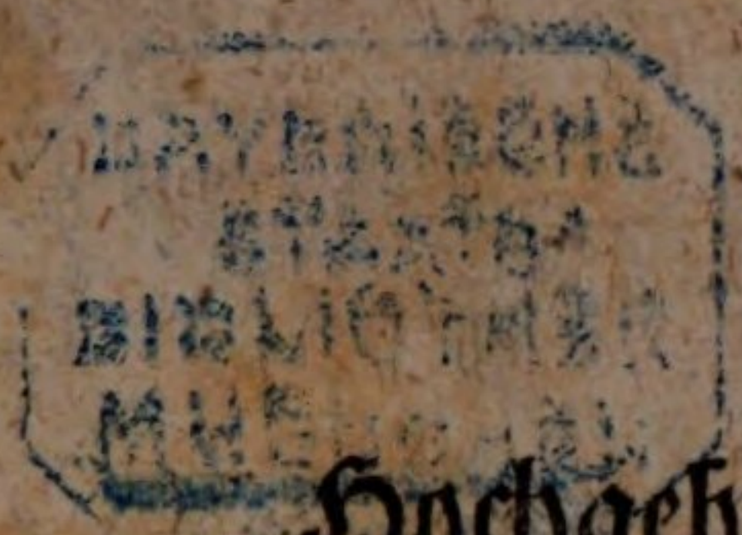
Abraham Gotthelf Käſtner

Königl. Großbritann. Hofrathe; Professor der Mathem. und Naturl. der Gött. Kön. Ges. der Wissensch. der Kön. Schwed. und Preuss. Akad. der Wiss. der Erfurtischen Churfürstl. Ges. nützl. Wiss. der bononischen Akad. der Wiss. der perusinischen Academiae Augustae Mitgliede; der Kön. deutschen Ges. zu Göttingen Aeltesten, Mitgliede der Leipziger deutschen Gesellschaft, und Gesellschaft der freyen Künste, und der Jenaischen latein. und teutschen Gesellschaften.

Der mathematischen Anfangsgründe
vierter Theil; erste Abtheilung.

Göttingen
Im Verlag der Wittwe Vandenhoek
1766.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS



Dem

Hochgebohrnen Freyherrn

Herrn

Friedrich August von Hardenberg

Königlich-Großbritannischen

und

Churfürstlich-Braunschweig-Lüneburgischen

Hochbetrautem

wirklichen Geheimden Rathe

Meinem gnädigsten Herrn.

Hochgebohrner Freyherr
Gnädigster Herr
Hochgebietender Herr
Geheimder Rath

Ew. Excellenz verstatten gnädigst, daß zu Bezeugung meiner unterthänigsten Ehrfurcht Denenselben gegenwärtiges Buch, als eine Probe überrei-

che, wie ich auf hiesiger Univer-
sität, mit Ausbreitung des mir
gnädigst anvertrauten Theils
der Gelehrsamkeit beschäfftiget
bin.

Ohne die Wahrheiten, wel-
che es enthält, zu wissen, begreift
man nicht, wie die Kräfte der
Natur auf unzählige Art von
den Menschen zu ihrem Vortheil
le und ihrer Bequemlichkeit an-
gewandt werden: Gleichwohl
ist in unserer Sprache noch kei-
ne Anleitung zu so wichtigen
Kenntnissen vorhanden ge-
wesen.

In

In der That können auch nur auf einer hohen Schule, die einen so gnädigen Schutz genießt, als die Göttingische, die Lehrer daran gedenken, den allerbekanntesten Anfangsgründen auch höhere Wahrheiten beyzufügen, ohne welche oft dasjenige nicht einmahl zu brauchen ist, wobey der Haufe gemeiner Gelehrten stehen bleibt, wenn er ja noch bis dahin kömmt.

Das Wohlergehen Ew. Exc. und Dero hohen Geschlechts, das schon um die hiesigen Lande

so grosse und so vielfache Ver-
dienste hat, wird stets der Ge-
genstand meiner eifrigsten Wün-
sche seyn; der ich mit tiefster
Devotion verharre

Hochgebohrner Herr
Geheimder Rath

Gnädigster Herr

Ew. Hochfreyherrl. Excellenz

Göttingen
den 27. Sept.
1765.

unterthänigstgehorsamster
Abraham Gotthelf Kästner.

BAYERISCHE STAATS BIBLIOTHEK MÜNCHEN

Vorrede.

Die Statik, die in den gewöhnlichen Anleitungen zur Meßkunst, den Nahmen der Mechanik führet, betrachtet nur das Gleichgewicht, da von entgegengesetzten Kräften jede die Bewegung hindert, welche die andere gern hervorbringen wollte: die Mechanik, wie das Wort jetzo genommen wird, betrachtet wirkliche Bewegungen. Dieser Wissenschaft ihr Gegenstand ist also von jener ihrem ohngefähr so unterschieden, wie Krieg von dem, was wir Friede nennen, was

eigentlich nicht Ruhe, sondern Gleichgewicht ist, und oft so unterbrochen wird, wie wenn bey einer Waage, das eine Gewicht eine Ueberwucht bekömmt, die ganze Maschine in Unordnung bringt, und, so gut als sein zu schwacher Gegner, endlich zu Boden stürzt. Diese Vergleichung der Statik und Mechanik mit Frieden und Kriege muß man nicht über ihre Gränzen ausdehnen. Die Mechanik erfodert vielmehr Kenntniß und Anstrengung des Verstandes als die Statik: daß es aber nicht so schwer seyn möchte im Kriege als im Frieden groß zu werden, das zu muthmassen, verleitet mich fast die grosse Menge von den Geschichtschreibern verewigter Helden, mit der geringen Anzahl solcher Regenten verglichen, deren Andenken noch Jahrhunderte nach ihnen gesegnet ist.

Die Kraft der Schwere, von der wir fast jeden Augenblick Empfindungen haben, wird in der Statik zuerst betrachtet, und sie macht auch in der Mechanik den Anfang. Die Gesetze, nach denen schwere Körper fallen, wie Galiläus solche im Anfange des vorigen Jahrhunderts entdeckt hat, sind die ersten Gesetze bewegter Körper gewesen, die man

hat

hat kennen gelernt. Von allen andern Kräften, machen wir uns nur Begriffe, indem wir sie uns als Schweren vorstellen, die sich etwa in der Stärke, der Richtung u. d. g. von unserer Schwere unterscheiden, fast wie wir von andern Geistern nur in so weit Begriffe haben, in so fern wir uns dieselben als Seelen vorstellen, die von unserer Seele nur in der Vollkommenheit, Verbindung mit Körpern u. s. w. unterschieden sind. Ich dürfte bald die Vergleichung noch weiter treiben, bey dem Geisterromane, der unter dem Nahmen des Comte de Gabalis bekannt ist, an gleich sinnreiche Untersuchungen über solche Kräfte denken, dergleichen es in der Natur geben könnte, aber nirgends giebt, und fragen, ob solche Erdichtungen berechnen, nicht eben so was ist, als sich mit Sylphen und Gnomen belustigen. Weil ich das letzte, als eine Ergötzung nicht tadele, weil ich einem Dichter gern ins Reich der Möglichkeiten folge, so wird man leicht urtheilen, daß ich auch den Mathematikverständigen gern in dieses Reich begleite, doch daß es nur eine Lustreise ist, weil ich in der wirklichen Welt genug Gegenstände, die meiner Aufmerksamkeit wehrt sind, finde, und weil auch unter den Gedichten,

ten, Hallers Alpen mich besser unterhalten, als Zachariäs Schöpfung der Hölle.

Mir ist in deutscher Sprache kein Buch bekannt, aus dem man mit einiger Gründlichkeit und Vollständigkeit, die Lehren der höhern Mechanik lernen könnte, die in der Naturkunde, beym Maschinenwesen, fast bey allen Künsten so unentbehrlich sind. Da ich dergleichen abzufassen unternahm, mußte ich mich auf das am meisten Brauchbare einschränken.

Den Anfang macht die Bewegung der Körper, bey denen weder Grösse noch Gestalt betrachtet wird, und die man also blos als bewegte Puncte ansieht. Herr Euler hat die dahin gehörigen Untersuchungen fast erschöpft (*), ich habe in dem, was hierbey blos auf Rechnungen ankömmt, lediglich seiner Anleitung gefolgt, nur die Rechnungen erläutert, wo er geübtere Leser voraussetzen konnte, als ich. Da ich aus Hrn. Eulers Buche, als es noch ganz neu war, diesen

Theil

(*) Mechanica s. motus scientia analytice exposita. Petrop. 1736; 2 Quartbände.

Vorrede.

Theil der höhern Mechanik durch eignen Fleiß erlernt, über alle Schwierigkeiten, die in den Rechnungen vorkommen, die Erläuterungen aufgezeichnet, und in Leipzig unterschiedenemahl nach der Anleitung dieses Werks besondern Unterricht ertheilt habe, so ist mir bey gegenwärtiger Arbeit das schwerste gewesen, solche Untersuchungen auszuschliessen, die durch ihre Schönheit reitzen, bey der Kürze aber, die ich mir vorschreiben mußte, von unentbehrlichern verdrängt wurden. Die ersten beyden Abschnitte enthalten dasjenige, was ich hier aus Hrn. Eulers beyden Quartanten anzubringen wagte. Den dritten, wo Körper von gegebener Grösse und Gestalt betrachtet werden, habe ich auf Joh. Bernoullis Lehre, wie bewegende Kräfte einen Hebel drehen, gegründet, und damit unterschiedene nachdem angestellte Untersuchungen verbunden. Da Hr. Euler von Bewegungen fester Körper kürzlich ein eignes Werk herausgegeben hat, so habe ich aus demselben im 216. u. f. Abs. des III. Abschn. die ersten Gründe allgemeiner Lehren davon vorgetragen, aber auch daselbst angezeigt, warum ich mich darein nicht weitläuftiger eingelassen habe. Doch ich will hier meinen

Lesern

Vorrede.

Lesern nicht das sagen, was sie aus dem Innhalte vor gegenwärtigem Buche gleich übersehen können, ich will nur noch das erinnern, daß ich nebst der Brauchbarkeit der Lehren, die ich hier vortrage, zugleich auf ihre Gewißheit gesehen habe. Etwas das Hr. d'Alembert vor mir gesagt hat, würde ich ohne ihn auch sagen, aber damit bey meinen Landsleuten nicht so viel Glauben finden, als wenn ich einen ausländischen Gewährsmann anzuführen weiß: daß man in der Mechanik manchmahl nur bemüht gewesen ist, das Gebäude hoch aufzuführen, ohne sich zu bekümmern, ob der Grund fest genug sey (*). Hr. d'Alembert, hat diesen Grund an unterschiedenen Stellen scharf geprüfet, ob er allemahl einen bessern gelegt hat, will ich nicht sagen.

Unsere Kenntniß der wirklichen, oder, wie ich sie lieber nennen wollte, der scheinbaren, Welt, gründet sich auf Erfahrungen und Schlüsse, die sich daraus herleiten lassen. Ohne Ausmessungen und Berechnungen ist hier nichts zuverlässig und bestimmt; die Analysis und besonders die Rechnung des Unendlichen

(*) Dynamique pref.

lichen sind nothwendig die Natur kennen zu lernen, wie es nothwendig ist, Latein zu verstehen, um den Cicero und Virgil zu lesen; Sie werden durch ihre Anwendung auf die Kenntniß der Natur erweitert, und mit neuen Kunstgriffen vermehrt, wie man in der Sprache der römischen Schriftsteller, durch fleissiges Lesen geübter und vollkommener wird. Nun aber giebt es Leute, die nicht die Sprache der Schriftsteller wegen lernen, sondern die Schriftsteller der Sprache wegen lesen. Es wäre gut, wenn die Mathematikverständigen es nie so gemacht hätten. Meines Erachtens wenigstens ist in der Theorie die edelste Beschäfftigung: Denken; Beym Rechnen verbindet man Zeichen eben in der Absicht, daß man sich die Mühe an die Bedeutung der Zeichen alle Augenblicke zu denken ersparen will. Aber bey der ersten Anordnung und Verbindung dieser Zeichen muß man die Begriffe wohl kennen, die man durch sie ausdrücken will, und genau wissen, wie weit sich diese Begriffe durch Zeichen ausdrücken lassen. Eben diese Sorgfalt ist bey dem Gebrauche der gewöhnlichen Wörter zu beobachten. Ich habe gesucht hierinnen nichts zu verabsäumen, und daher wird man häufige

Stellen

Stellen in meinem Buche antreffen, wo lange nach einander philosophirt und nicht gerechnet ist. Es hat mir geschienen, als könnte ich so, manche Sachen, die bisher fast als Geheimnisse sind vorgetragen worden, auf gemeine und jedem begreifliche Sätze bringen, wie die Lehre von der Trägheit I. Abschn. 20. §. und der Gegenwirkung III. Abschn. 125. §. oder was sich sicher ausmachen läßt, von dem Ungewissen absondern, wie bey dem Gesetze der Stetigkeit III. Abschn. 183. §. Ich weiß nicht, ob ich mir auch schmeicheln darf, die Wahrheit und Nothwendigkeit der Formel, auf welche sich die ganze höhere Mechanik gründet, im I. Abschn. 65. §. vollkommen offenbahr gemacht zu haben.

Ich habe zugleich allemahl ein Augenmerk mit auf die Geschichte der Wissenschaft gehabt, nicht daß ich alle Schriften sorgfältig hätte anführen wollen, denn das heißt die Geschichte der Büchertitel, sondern daß ich, so oft es die Gelegenheit gegeben hat, angezeigt habe, wie und von wem die Wissenschaft nach und nach ist erweitert worden. Wenn man auch verdienten Gelehrten dieses Andenken nicht schuldig wäre, so ist es doch allemahl

mahl für uns wichtig, zu unserm eigenen Vortheile zu wissen, was bisher ist gethan, und wie eine Erfindung aus der andern ist hergeleitet worden. Bey dieser Gelegenheit will ich noch einen historischen Zusatz zu des II. Abschnitts 56. Absatze 216. S. beybringen, den ich an seiner Stelle einzurücken vergessen hatte.

Es ist daselbst von Uhren geredet, deren Pendel einen Kegel beschreibt. Huygens meldet das wesentliche dieser Uhren, nähmlich die Vorrichtung, daß das Gewicht auf einem paraboliſchen Sphaeroid geht, ganz am Ende des Hor. osc. unter der Aufschrift: Horologii secundi constructio. Der ungedruckte Aüffatz, den Leibniz, wie ich im Buche erzähle, erwähnt, muß etwa eine ausführlichere Beschreibung solcher Uhren enthalten haben, denn das Horol. osc. ist schon zu Paris 1672. gedruckt worden.

Andere Geschäffte haben mich jetzo verhindert, die Anwendungen der höhern Mathematik auf den Druck und die Bewegung flüssiger Körper beyzufügen. Sie sollen nebst einigen andern zur Mechanik gehörigen Unter-

Vorrede.

suchungen, den Innhalt eines zweyten Bandes, wie gegenwärtiger, ausmachen, der diese Einleitung ergänzen wird. Ich werde mich, wie bey dem jetzigen Bande geschehen ist, bemühen, das Philosophische dieser Lehren auf deutliche Begriffe und unläugbare Wahrheiten zu gründen, und das Mathematische so vorzutragen, daß jemand, der die vorigen Theile meiner Anfangsgründe, besonders die Analysis sich wohl bekannt gemacht hat, keinen Anstoß findet, nützliche Wahrheiten durch eignen Fleiß daraus zu erlernen.

Göttingen im September 1765.

Abraham Gotthelf Kästner.

Innhalt.

Innhalt.

Erster Abschnitt.

Von freyer Bewegung der Puncte.

Abſatz.

1. C. Von der Bewegung überhaupt = 1
2. C. Von der Trägheit = = = 20
Von den Kräften = = = 27
Geſetze fallender Körper = = 28
3. C. Allgemeine Geſetze der Wirkungen der Kräfte.
Bewegende und beſchleunigende Kraft 48
Betrachtungen über die Veränderungen der Geſchwindigkeit, welche beſchleunigende Kräfte bey wirklichen Bewegungen verurſachen = = 51
4. C. Von veränderlichen Kräften = 83
5. C. Vom Wiederſtande = = = 106
6. C. Von der Bewegung in krummen Linien 160
Freye Bewegungen, und Bewegungen nach vorgeſchriebenen Wegen = 172
Bewegung geworfener Körper, in die eine beſtändige Kraft, wie unſere Schwere, wirkt = = = 173
Bewegung in krummen Linien, wenn Centralkräfte wirken = = = 202
Wie hier die Gleichungen auf rechtwinklichte Coordinaten gebracht werden 214
Weg eines Körpers, wenn ſich die anziehende Kraft verkehrt, wie das Quadrat der Entfernung verhält 220. u. 234

Innhalt.

Warum die Abscissenlinie auf die krumme Linie senkrecht seyn muß = = = = 232
Was für eine Kraft nöthig ist, eine Ellipse um ihren Brennpunct zu beschreiben = 238
Anwendung auf die physische Astronomie = 241
Krumme Linien, wenn sich die Kraft verkehrt, wie der Würfel der Entfernung verhält 258
Wenn die krummen Linien bey Centralkräften algebraisch werden = = = = 263
Isochrona paracentrica bey freyer Bewegung 265

Zweyter Abschnitt.

Von

Bewegung der Puncte auf vorgeschriebenen Wegen.

Erklärungen und Vorerinnerungen = Abs. 1
Von dieser Bewegung im leeren Raume = 11
Vom Falle auf einer gegebenen Linie = 19
Vom Falle im Kreise = = = 21
Huygens Sätze von der Schwungkraft = 24
Von der Schwungbewegung = = 25
Lehnsätze vom Integriren = = 30..32
Endliche Schwingungen im Kreise = = 33
Unendlich kleine = = = = 34
Die Tiefe des freyen Falls in einer Secunde 45
Allgemeiner Fuß = = = = 47
Linie von einerley Zeiten des Falls (tautochrona) = = = = 53

Drit-

Innhalt.

Dritter Abschnitt.

Von der Bewegung fester Körper, deren Grösse und Gestalt bestimmt sind.

Bewegende Kräfte am Hebel = = Abs. 1
Moment der Trägheit = = = 3
Mittelpunct des Schwunges = = 6
Für allerley Ebenen = = = = 17
Schwung nach der Seite und nach der Fläche;
(in latus und in planum) = = = 25
Von runden Körpern = = = = 30
Anwendung auf die Pendeluhren = 32..37
Von der Ueberwucht = = = = 38
Beym Hebel = = = = 39..52
Moment der Trägheit für ein Parallelepipedum 53
Für einen senkrechten Cylinder, der sich um
seine Axe dreht = = = = 54
Ueberwucht bey Rad und Welle, die Theorie
mit Versuchen verglichen = = 57..79
Der Mittelpunct des Stosses = = 80
Von der Friction = = = = 81..95
Die Gesetze des Stosses und damit verwandte
Untersuchungen = = = = 96
Stoß harter Körper = = = = 104
Wirkung und Gegenwirkung = = 125
Stoß elastischer Körper = = = 132

Innhalt.

Bewegung des Schwerpuncts bey diesem Stosse 157
Veränderungen der Geschwindigkeit bey diesem Stosse = = = = = 158
Gleichheit zwischen den Summen der Producte aus den Quadraten der Geschwindigkeiten in die Massen, vor und nach dem Stosse = 164
Anleitung diese Sätze durch Versuche zu weisen 165
Mittheilung der Geschwindigkeit vermittelst mehrerer Körper = = = = 166
Schiefer Stoß = = = = 172
Stoß an Hindernisse die nicht weichen = 173
Gesetz der Reflexion bey elastischen Körpern 174
Dieses Gesetz aus Untersuchung des kürzesten Weges hergeleitet = = = 176
Ueber die Vergleichung des Stosses mit dem Drucke = = = = = 177
Aus fortgesetzten Drückungen können Bewegungen entstehen = = = = 180
In wie fern lebendige und todte Kräfte als Dinge, die sich nicht vergleichen lassen, anzusehen sind = = = = = 181
Wie man die Gesetze des Stosses durch die Integralrechnung findet = = = 182
Ueber das Gesetz der Stetigkeit = = 183
Wenn es keine vollkommen harte Körper giebt, sind die Körper ohne Ende theilbar = 185
Worauf der stärkste Beweis des Gesetzes der Stetigkeit beruht = = = 187

Innhalt.

In der gemeinen Geometrie findet es nicht überall statt = = = = 188
Worinnen es eigentlich besteht = = 189
Ob es den Uebergang aus einem Zustande in den andern begreiflich macht? = = 191
Die Vorstellung einer stetigen Grösse ist ein abstracter Begriff = = = 194
Wenn man das Gesetz der Stetigkeit anbringen kann = = = = = 195
Warum es bey Erscheinungen gilt? = 196
Anwendung desselben auf einen physischen Versuch = = = = = 197
Vom Maasse der Kräfte = = = 198
Leibnizisches und cartesisches Maaß = 201
Von der Erhaltung der lebendigen Kräfte = 205
Von dem Satze der kleinsten Wirkung = 209
Gründe allgemeiner Untersuchungen der Bewegung fester Körper, nach Hrn. Eulers Verfahren, in s. Theoria motus corporum rigidorum = = = = = 216
Verwandelung der Formeln für die veränderte Bewegung I. Abschn. 74. u. f. in solche die das dortige v nicht enthalten = = 217
Zerlegung einer Kraft oder Bewegung, in drey auf einander senkrechte = = 226
Jedes Körpers Schwerpunct zu finden = 227
Warum man diesen Punct hier Mittelpunct der Trägheit nennt? = = = 228
Eines Körpers Bewegung zu bestimmen, wenn Kräfte in ihn wirken, deren mittle-

re

Innhalt.

re Richtung durch den Mittelpunct der Trägheit geht = = = = 231
Von der drehenden Bewegung = = 233
Die Gewalt, welche die Axe leidet, um die sich eine sehr dünne Scheibe dreht, die auf sie senkrecht ist = = = = 238
Vom Momente der Trägheit in Körpern, deren Gestalt durch drey rechtwinklichte Coordinaten gegeben ist = = = 241
Wenn dieses Moment für eine Axe gegeben ist, es für eine parallele zu finden = 243
Das Moment der Trägheit eines Körpers für jede Axe zu finden, die durch den Mittelpunct der Trägheit geht = = 247
Die Lage der Axe durch den Mittelpunct der Trägheit zu finden, für welche das Moment der Trägheit ein größtes oder kleinstes ist = = = = = 250
Es giebt allemahl gewiß drey solche Axen 253
Um jede von ihnen kann sich der Körper frey drehen = = = = = 254

Erster

Erster Abschnitt
von
freyer Bewegung der Puncte.

I. Cap.
Von der Bewegung überhaupt.

1. Wenn ein Körper seinen Ort ändert, so sagt man er **bewege** sich. Der Ort wird offenbahr durch seine Lage gegen andere Körper bestimmt. Wenn wir einen Menschen in der Ferne auf dem Felde sehen, und nicht eigentlich erkennen können, ob er fortgeht oder stille steht, so werden wir acht geben, ob er seine Lage gegen unbewegliche Gegenstände, einen Baum, einen Hügel u. s. f. ändert oder nicht.

2. Wenn also der Mensch stille stünde, und der Baum oder Hügel sich von ihm entfernte oder ihm näherte, würde wohl dieses heissen der Mensch ver-

änderte seinen Ort, und bewegte sich also? Mit dieser Spitzfindigkeit hat man noch im vorigen Jahrhunderte die verwirrt, die die copernicanische Weltordnung verketzerten. Man bewies ihnen so, daß die Erde sich bewegte, sie möchte nun um die Sonne oder die Sonne um sie gehen, diese Ketzermacher, waren keine bessere Bestreitung werth. Wer nicht Lust zu Zanken hat, wird leicht unterscheiden, ob ein Körper seinen Ort verändert, oder ob andere Körper ihren Ort um ihn ändern.

3. Die Körper, B; C; D; E; 1. Fig. vermittelst der man den Ort des Körpers A bestimmt, von dessen Bewegung die Rede ist, mögen seyn was sie wollen, und liegen wie sie wollen. Wenn der Körper von A nach F geht, so wird man seine Bewegung daran erkennen, daß er sich von der Gegend wo B; E; liegen entfernt, nach der wo C; D; befindlich sind zugeht. Daher kann man sich eine grosse unbegränzte Ebene vorstellen, in der die Bewegung so erkennt wird, daß der Körper einen Theil dieser Ebene verläßt und nach einen andern zugeht. Dieß ist hier eine Abstraction von der Art wie die Abstraction des geometrischen Raums. (Geom. 3 Erkl.). Das heißt man also den **absoluten Raum**, und die Bewegung des Körpers in diesem Raume, die **absolute**.

4. Denn man kann die Bewegung eines Körpers, in Absicht auf einen andern ruhenden oder bewegten betrachten, und so heißt sie relativ. Wenn ein Schiff auf der offenbahren See von Winde z. E.

gerade

gerade nach Norden getrieben wird, so wird seine absolute Bewegung daraus geschätzt werden, wieweit es von seiner ersten Stelle fortgerückt ist. Wäre aber AF der Weg dieses Schiffes auf der See und MN der Weg eines andern; so würde die relative Bewegung darauf ankommen, wieweit das andere in N vor dem ersten in F voraus wäre, ob ihre Wege parallel, oder wie sie gegen einander geneigt wären u. s. w.

5. Wenn man von dem Wege eines Schiffes, eines Menschen, einer Bombe die durch die Luft fliegt u. s. w. redet; so bekümmert man sich hier nicht um die Gestalt, Grösse, und alles was diese Dinge als Körper von einander unterscheidet, und sieht sie daher blos als **bewegte Puncte** an. Ist aber die Rede von einer Bewegung die man nicht so betrachten darf, so kann man die Bewegung jeden Punctes dieses Körpers einzeln betrachten. Wenn ein Rad auf einem geraden Wege fortgewälzet wird, so beschreibt der Mittelpunct eine gerade Linie die mit diesem Wege parallel geht, und jeder Punct im Umfange eine Cycloide. (Alg. 597).

6. Man kann bey der Bewegung auf den **Weg** sehen der zurückgeleget wird, und auf die **Zeit** in welcher solches geschieht. Wenn ein Körper in einer geraden Linie geht, so heißt diese seine **Richtung**, geht er in einer krummen so ändert sich seine Richtung alle Augenblicke. (Geom. 6 Erkl.). Der zurückgelegte oder beschriebene Weg heißt auch der **Raum**. Beschreibt ein Körper in einer ge-

wissen Zeit einen gewissen Raum, und in jeder folgenden gleich grossen Zeit, eben so viel Raum, und findet dieses Statt, so klein, oder so groß man auch diese Zeiten annimmt, so heißt seine Bewegung **gleichförmig** (motus vniformis) und man sagt er behält immer einerley Geschwindigkeit. Seine Geschwindigkeit wächst, oder seine Bewegung wird **beschleunigt** (acceleratus) wenn er in jeder der folgenden Zeiten von eben der Grösse, mehr Weg zurücke legt, als in der vorhergehenden, und wenn er auf diese Art immer weniger Weg zurücke legt, so wird seine Bewegung vermindert (retardatus). Beydes gemeinschaftlich heisst eine veränderte Bewegung (variatus).

7. **Grundsatz.** Wenn sich die Körper M, N; (2 Fig.) jeder für sich, gleichförmig bewegen, und die Räume AB; EF, in gleichen Zeiten beschreiben, so ist die Geschwindigkeit von M in der Geschwindigkeit von N so vielmahl enthalten, so vielmahl AB in EF enthalten ist. Jedermann wird sagen, daß N, drey; viermahl geschwinder geht als M, wenn EF, drey; viermahl so groß ist als AB. **Wege also, die mit gleichförmiger Bewegung in einer Zeit zurück gelegt werden, verhalten sich wie die Geschwindigkeiten.**

8. **Grnndſ.** In eben der Fig. müsste EG = AB, in kürzerer Zeit beschrieben werden, und zwar in der Hälfte, dem dritten Theile u. s. w. der Zeit in welcher AB beschrieben wird, nachdem N zwey, dreymahl u. s. w. geschwinder gienge als M. Zeiten

ten also in denen einerley Wege beschrieben werden, verhalten sich verkehrt wie die Geschwindigkeiten.

9. Zus. Wäre also z. E. AB=7′ EF=9′ so könnte man sagen die Geschwindigkeiten von M und N verhielten sich wie 7:9 (7) und wenn allsdenn AB in 9 Minuten durchlaufen würde, müsse EG= AB in 7 Minuten durchlaufen werden (8). Man würde also sagen können des Körpers M Geschwindigkeit heisse 7; des Körpers N seine 9; Und so lassen sich Zahlen statt der Geschwindigkeiten nennen.

10. Aufg. Der Körper M, legt den Raum AB=S, in der Zeit T; und N den Raum EF=s in der Zeit t zurück. Man sucht die Verhältniß ihrer Geschwindigkeiten.

Aufl. Man setze P legt HI = S in der Zeit t zurück. So ist

Geschw. von M: Geschw. von P=t: T (8)
Geschw. von P: Geschw. von N=S: s (7)

Also (Ar. V. 50)

Geschw. von M: Geschw. von N=S. t: s. T

Ist also die gesuchte Verhältniß der Geschwindigkeiten C: c, so hat man

$$C:c = S.t:s.T = \frac{S}{T} : \frac{s}{t}$$

oder die Geschwindigkeiten verhalten sich wie die Räume mit den Zeiten dividirt. (sunt in ratione composita ex directa spaciorum & reciproca temporum Ar. VI; 1.).

11. Zus. C. T : c. t = S : s; die Räume verhalten sich wie die Producte aus den Geschwindigkeiten in die Zeiten.

12. Zus. $T : t = \frac{S}{C} : \frac{s}{c}$ die Zeiten verhalten sich wie die Räume mit den Geschwindigkeiten dividirt.

13. Anm. Wenn sich' ein Paar Grössen von einer Art beständig wie ein Paar Grössen von einer andern Art verhalten, so druckt man diese Verhältniß oft so aus, als ob die Grösse von einer der von der andern Art gleich wäre. Selbst in solchen Fällen, wie die wovon hier die Rede ist sagt man z. E. „der Weg von dem Orte bis zu jenen beträgt sechs „Stunden;„ d. i: Er verhält sich zu jedem andern Wege, wie sechs Stunden, zu der Zeit die der andere Weg erfodert. So heissen in der Geometrie, wenn R einen rechten Winkel die Ausdrücke $R = 90°$; $\frac{2}{3} R = 60°$ weiter nichts als $R : \frac{2}{3} R = 90 : 60$. Man wird also verstehen was folgende Gleichungen sagen wollen:

$$C = \frac{S}{T}; \quad S = CT; \quad T = \frac{S}{C}$$

sie bedeuten nähmlich nur, vorhergehende Proportionen. Gesetzt ein Körper lege in 7 Min. = T einen Weg von 3′ = S zurück. So heißt seine Geschwindigkeit $\frac{3}{7}$; d. i. Wenn man jedes andern Körpers Weg in Fussen, und die Zeit in Minuten ausdrückt, so verhält sich dessen Geschwindigkeit zu jener wie der ähnliche Quotient bey ihm zu dem vorigen. Wenn des andern Körpers Weg 16′ in 20. Min. ist, so ist seine Geschwindigkeit $= \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$ d. i. sie verhält sich zu jener wie $\frac{4}{5} : \frac{3}{7} = 28 : 15$ oder in eben der Zeit da der erste Körper 28 durchlaufen würde, durchläuft der andere 15. So wird man sich leicht auch Exempel für die andern Gleichungen machen können.

Man

Man könnte die Geschwindigkeit c, die erfodert wird den Raum f in der Zeit t zu durchlaufen, gleichsam zur Einheit der Geschwindigkeiten annehmen, und fragen, wie vielmahl jede andere grösser oder kleiner wäre als sie. In dem Falle wären in der eigentlichen Gleichung $C = \frac{ct}{f} \cdot \frac{S}{T}$ die kleinen Buchstaben gegeben, und behielten unveränderlich ihren Werth, wie sich auch die Werthe der grossen änderten. Z. E. wenn $t = 20$ M; $f = 16'$ so wäre $C = c. \frac{20}{16} \cdot \frac{S}{T} = c. \frac{5}{4} \cdot \frac{S}{T}$. Ist also $S = 3'$; $T = 7$ M. so ist $C = \frac{5 \cdot 3}{4 \cdot 7} = \frac{15}{28} c.$ Wäre $S = 12'$ $T = 19$ M. so käme $C = \frac{1}{4} \cdot \frac{12}{19} \cdot c = \frac{12}{19} c$ u. s. w. Wenn man also statt $\frac{ct}{f}$ einen einzigen Buchstaben r, schreibt, der ungeändert bleibt wie sich auch S, T, C, ändern, so giebt es eine eigentliche Gleichung $C = r \frac{S}{T}$ wo C durch c als die Einheit ausgedruckt wird. Man muß aber S und T in eben solchen Massen ausdrücken wie f und t; Z. E. die Räume beyde in Fussen, die Zeiten beyde in Minuten. Denn setzte man in vorigen Exempel $S = 144''$, $T = 1140$ Secunden, so wäre zwar der Ausdruck $C = \frac{ct}{f} \cdot \frac{S}{T}$ noch so richtig $C = c. \frac{7\text{ M}}{3'} \cdot \frac{144''}{1140\text{ Sec.}}$ aber man müßte ohne Zweifel die Grössen von einerley Art durch einerley Einheiten ausdrücken. Eben so wäre $S = \frac{f}{ct} \cdot CT$ und also $S = e.$ CT wenn $e = \frac{f}{ct}$; wo wiederum f und S; t und T; c und C, in einerley Einheiten auszudrücken wären.

Wäre $c = 1$; $f = 16'$, $t = 20$ M; so käme $S = \frac{1}{2}\frac{6}{0}$. $CT = \frac{4}{5}.CT$. Nun sey $C = \frac{1}{2}\frac{5}{8}$ das ist $C = \frac{1}{2}\frac{5}{8}c$; $T = 7$ M. so ist $S = \frac{4}{5}.\frac{1}{2}\frac{5}{8}.7 = 3$ welches 3' giebt, weil die Räume hier in Fussen ausgedrücket werden, und mit vorigen übereinstimmen.

14, Lehnsatz. Bey jeder veränderten Bewegung wo die Geschwindigkeit nur allemahl endlich bleibet, kann man annehmen, daß unendlich kleine Theile des Raumes in unendlich kleinen Zeittheilchen, gleichförmig beschrieben werden. Dieses gründet sich auf die bekannten Begriffe der Rechnung des Unendlichen. (Anal. des Unendl. 37. 38. §.). Die Geschwindigkeit von Q 3 F. sey v in S; u in T und die Bewegung beschleunigt, also $u > v$. so wird ST in kürzerer Zeit durchlaufen, als wenn sie gleichförmig mit der Geschwindigkeit v beschrieben würde, aber in längerer Zeit, als wenn sie gleichförmig mit der Geschwindigkeit u beschrieben würde. Weil nun die Veränderung der Geschwindigkeit stetig angenommen wird, so kommen v und u einander so nahe als man will, wenn S und T einander so nahe kommen als man will, oder man kann allezeit ST so klein annehmen, daß die Zeit durch ST von der Zeit die v, und von der die u gäbe, so wenig als man will unterschieden ist.

Die bisherigen Lehren, von unveränderlichen und veränderlichen Geschwindigkeiten und ihrem Verhalten zum Raume hat Colin Mac Laurin, Treatise on Fluxions B. I. ch. I. sehr weitläuftig aus einander gesetzt, und aus der euklidischen Erklärung der Proportion bewiesen.

15. Zus.

15. Zus. Wenn also $u = v + dv$; $ST = ds$; die Zeit durch ST, $= dt$ so ist $ds = vdt$ (13) oder ds verhält sich wie vdt, welches man auch durch $ds = evdt$ auszudrücken pflegt, wo e eine Zahl bedeutet die für jedes andere s, v, t, einerley bleibt (13).

16. Zus. Dieses gilt der Weg RST mag gerade oder krumm seyn, weil die Schlüsse sich nicht auf das Gerade gründen.

17. Aufg. Die Geschwindigkeit in jeder Stelle ist als eine Function des zurückgelegten Raumes gegeben. Man sucht die Zeit die jedem Raume zugehört.

Aufl. Also sind in $\frac{ds}{v} = dt$ die veränderlichen Grössen von einander gesondert (An. des Un. 405) und $t = \int \frac{ds}{v}$

18. Ex. Die Geschwindigkeit verhalte sich wie eine Potenz des zurückgelegten Raumes; oder es sey $v = s^n$ so ist $dt = s^{-n} ds$; und $t = \text{Const} + \frac{s^{1-n}}{1-n}$. Nun soll die Zeit von dem Augenblicke an gerechnet werden, da die Bewegung sich anfing, d. i. da ein Raum beschrieben zu werden anfing. Also verschwinden s und t, zugleich, wenn nun $1-n$ bejaht ist, so verschwindet s^{1-n} für $s = o$, und ist da $\text{Const} = o$. Das ereignet sich also wenn n verneint ist, was es auch da seyn mag, oder wenn es bejaht aber kleiner als 1 ist. In

dem ersten Falle verhält sich die Geschwindigkeit verkehrt, wie eine gewisse Potenz von bejahten Exponenten des Raumes, z. E. wenn $n = -2$ so ist $v = \frac{1}{s^2}$ oder die Geschwindigkeit verhält sich verkehrt wie das Quadrat des zurückgelegten Raumes, und nimmt also so ab, wie dieses Quadrat zunimmt, daß sie nach Zurücklegung des dreyfachen Raumes, neunmahl kleiner ist, als nach Zurücklegung des einfachen; da wäre denn $t = \frac{s^3}{3}$ oder die Zeit verhielte sich wie der Würfel des Raumes, und zum dreyfachen Raume gehörte 27mahl so viel Zeit als zum einfachen. Ist n ein bejahter eigentlicher Bruch, so wächst die Geschwindigkeit zugleich mit dem Raume, aber langsamer als er, so daß sie für den doppelten Raum noch nicht doppelt ist.

Ist aber n bejaht und > 1 so wird $1 - n$ verneint, und s auf eine Potenz dieses Exponenten erhoben, unendlich für $s = o$ also müsse Const unendlich seyn, und $t = \infty + \frac{s^{1-n}}{1-n}$ zeigt an, daß eine unendliche Zeit verfliessen müßte bis der Raum s zurückgelegt würde; d. i. daß er nie zurückgelegt werden kann. Eine solche Bewegung also ist nicht möglich, wo die Geschwindigkeit gleich vom Anfange der Bewegung mit dem Raume zugleich, und schneller als er wüchse.

Eben das gilt für $n = 1$; wo $dt = \frac{ds}{s}$ und $t = \text{Const} + ls$; denn für $s = o$ ist auch $ls = -\infty$.

19. Anm.

19. Anm. Man kann sich eine krumme Linie vorstellen, deren Abscisse = s; ihre Ordinate = v hiesse. So findet man hier die Ordinate r, einer andern krummen Linie, für eben die Abscisse s; diese Linien heißt man scalas, jene velocitatum, diese temporum, und die Aufgabe lehrt also eine aus der andern finden, d. i. wenn jene gegeben ist, jede Ordinate der andern finden, die zu einer gegebenen Abscisse der ersten gehört. Für $n = -2$ wäre die scala velocitatum eine Hyperbel vom dritten Grade, wie An. d. Un. 115 und die scala temporum eine cubische Parabel. In ältern Schriften z. E. Hermanns Phoronomie, sind diese Linien sehr gebraucht, deren wirkliche Verzeichnung meistens entbehrlich ist.

20. Anm. Bisher habe ich Bewegungen betrachtet, ohne mich um die Kräfte zu bekümmern, durch welche sie verursacht werden. Diese Betrachtung kann man zur Phoronomie rechnen, so wie in der Dynamik die Kräfte selbst mit in Erwägung gezogen werden.

II. Cap.

von der Trägheit.

21. Erf. Wenn wir einen Körper der still zu liegen scheinet nur auf einer wagrechten Ebene fortschieben wollen, so fühlen wir daß Gewalt dazu nöthig ist, und sagen in diesem Verstande er widerstehe uns. Dieser Widerstand rührt nicht von der Schwere her, die uns nur hinderlich seyn kann wenn wir ihn heben (Stat. 3). Eben so brauchen wir Gewalt einen Körper der sich bewegt, aus seiner Richtung zu bringen, seine Bewegung zu beschleunigen, oder zu vermindern.

22. Zus.

22. Zus. Heißt man also **Zustand** eines Körpers, die Ruhe wenn er sich nicht bewegt, Richtung und Geschwindigkeit, wenn er sich bewegt, so finden wir, daß wir ohne Anwendung einiger Gewalt, den Zustand eines Körpers nicht ändern können, und nehmen also dieses für das Merkmahl an daran wir Körper erkennen. Eine Erscheinung die wir vor uns wegtreiben könnten, ohne dabey zu empfinden, daß wir die geringste Gewalt anwendeten, würden wir für nichts körperliches halten. Selbst für ein Gespenst würde sie uns zu zart seyn, denn Gespenster sollen ja manchmahl gefühlet werden.

23. Zus. Es sieht also wenigstens so aus, als ob in dem Körper etwas wäre, das ihn in dem Zustande in dem er ist zu erhalten strebte und jeder Bemühung ihn aus diesen Zustand zu bringen hinderlich fiele, und den Zustand nicht eher bis es überwunden ist, ändern liesse. Dieses kann man die **Trägheit** (inertiam, vim inertiae) nennen. Daß sich eine solche Erscheinung in den Körpern ereignet, ist so gewiß, so gewiß es ist, daß es uns aussieht als drehte sich der Himmel um uns wie eine hohle Kugel. Der Nahme **Trägheit** läßt sich also gewiß mit eben so viel Rechte brauchen, als die Vorstellung der hohlen Himmelskugel. Aber würklich so was anzunehmen, und solches noch dazu **Kraft** zu nennen, dazu sind wir so wenig berechtiget als die wirkliche Umdrehung des Himmels zu behaupten. Diese sogenannte Kraft, hat vieles, das selbst die für wunderbar und von

der

der Vorstellung anderer Kräfte ganz abweichend erklären, die ihr am meisten gewogen sind. Sie übt niemals für sich eine Würkung aus, nur zeigt sie wenn sie gleichsam aufgefodert wird, eine Gegenwirkung. Ein Körper der still liegt thut nichts, bis man ihn bewegen will, alsdenn hindert er dieß was ihn bewegen will. So ist diese Kraft, so zu reden nur ein Wiederhall anderer Kräfte.

Vocalis nymphe quae nec reticere loquenti.
Nec prior ipsa loqui didicit, resonabilis Echo.

Metam. L. III.

Sie hat auch keine bestimmte Grösse denn sie wiedersteht viel oder wenig, nachdem die Gewalt der sie sich wiedersetzet groß oder klein ist.

24. Zus. Weil die Trägheit das Merkmahl der Materie ist, so ist alle Materie träge, ein Ding nähmlich, das solches nicht wäre, erkennen wir nicht für Materie. Bey ruhender Materie, kann sich also die grössere Menge von der geringern durch nichts als durch mehr Trägheit unterscheiden, oder die Trägheit verhält sich wie die Masse, noch einmahl so viel Masse hat noch einmahl so viel Trägheit, welches die Trägheit mit dem Gewichte der Materie gemein hat und aus einer ähnlichen Ursache, weil nehmlich auch alle Materie die wir kennen, schwer ist (Stat. 9.).

25. Zus. Wenn wir den Zustand eines Körpers ohne unser Zuthun geändert sehen, so vermuthen wir was anders müsse das gethan haben,

was

was wir zu dieser Absicht hätten thun müssen (20) der Zustand eines Körpers ändere sich also nicht von sich selbst, sondern nur vermöge einer äussern Ursache. Ein stilliegender Körper, werde immer liegen bleiben, ein bewegter, immer nach der Richtung und mit der Geschwindigkeit die er jetzt hat fortgehen, wenn nicht äussere Ursachen, jenen in Bewegung setzen, diesen aus seinem Wege bringen, oder seine Geschwindigkeit ändern.

26. Zus. Alles dieses heißt meiner Einsicht nach so viel: Aenderungen in dem Zustande des Körpers geschehen nicht ohne Ursache: Unsere Empfindung lehrt uns, so oft wir nur wollen daß wir eine solche Ursache die sich auser dem Körper befindet, abgeben können, auch daß andere auser dem Körper befindliche Dinge eben so was thun. Eine Quelle der Veränderung in dem Körper zu muthmassen haben wir nicht die geringste Veranlassung, also leiten wir alle Veränderungen von äusserlichen Ursachen her, und beurtheilen was diese Ursachen thun müssen, aus dem was wir thun. So ist die Trägheit weiter nichts als der Satz des zureichenden Grundes auf die Veränderungen des Zustandes der Körper angewandt. Wer behauptet daß sie aus dem Begriffe des Körpers fliesse, der hat völlig Recht denn wir haben uns diesen Begriff nach unsern Empfindungen gemacht, und folglich die Trägheit mit hinein gebracht.

27. Anm.

27. Anm. Ich habe hievon etwas umständlicher bey Cadwallader Coldens Erklärung der ersten würkenden Ursache der Materie gehandelt; die ich 1728. übersetzt heraus gegeben habe, 96 u. f. S. auch in einer Vorlesung die ich 1763. in der hiesigen Königl. Gesellsch. d. Wissenschaften gehalten.

Von den Kräften.

28. Erkl. Kraft heißt was den Zustand eines Körpers zu ändern strebt. Eine solche Kraft ändert den Zustand eines Körpers entweder gleichviel, er mag ruhen, sich schnell oder langsam bewegen, oder sie wirkt anders in einen ruhenden, anders in einen verschiedentlich bewegten Körper und ändert so nicht aller Zustand gleichviel; jenes heisst eine absolute, dieses eine relative Kraft.

Wenn ich meine Hand an eine stillliegende Kugel bringe, und solche fortzugehen nöthige, so bringt meine Hand anfangs viel Veränderung in der Kugel hervor; sie erzeuget Geschwindigkeit wo anfangs gar keine war. Beweae ich meine Hand immer mit einerley Geschwindigkeit fort, so wird dieser Geschwindigkeit die immer wachsende Geschwindigkeit der Kugel immer näher kommen, folglich diese immer weniger und weniger durch den Druck meiner Hand vergrössert werden, dem sie immer mehr und mehr ausweicht. Dieses wird so weit gehen, daß die Kugel sich zuletzt so schnell bewegt als meine Hand, und daher von derselben Nachfolge nichts mehr empfindet. Die Art wie meine Hand hier wirkt zeigt wie relative Kräfte

wirken

wirken. Führte ich meine Hand viel schneller fort als die Kugel vor ihr herläuft, so würde ich dadurch der Kugel Gang immer beschleunigen und desto mehr immer ohngefähr gleichviel beschleunigen, je grösser die Geschwindigkeit meiner Hand in Vergleichung mit der Geschwindigkeit der Kugel wäre. Denn jemehr diese Verhältniß der Geschwindigkeiten statt findet, desto weniger weicht die Kugel der Hand aus, und desto näher kömmt also der Fall dem Falle da die ruhende Kugel, von der Hand, der sie also noch gar nicht auswiche, den Anfang ihrer Geschwindigkeit erhielte. Setzte man also der Hand Geschwindigkeit unendlich groß in Vergleichung mit der Geschwindigkeit der Kugel, so wäre es so viel als wiche die Kugel ihr gar nicht aus, und die nachschiebende Hand, würde also jeden Augenblick, der Kugel Geschwindigkeit um einen unendlich kleinen Zuwachs vermehren, der eben so groß wäre als der Anfang der Geschwindigkeit, den sie den ersten Augenblick, in der ganz ruheenden Kugel erreget hatte. Denn für diese Hand ruht die Kugel beständig, und weicht ihr immer nicht mehr aus, als im Anfange. Das wäre ein Bild einer absoluten Kraft.

Die Gesetze fallender Körper.

29. Erkl. Wenn ich einen Stein auf der Hand liegen habe, so merke ich nicht, daß es mich mehr oder weniger Mühe kostet ihn zu erhalten, ich mag die Hand hoch oder niedrig halten, ihn

nahe

nahe bey dem Erdboden oder auf einem hohen Thurme, tragen.

30. Zus. Die Gewalt welche verursacht, daß der Stein fallen würde wenn ich ihn nicht hielte, die **Schwere**, wirkt also in eine gegebene **Masse**, eine gegebene Menge körperlicher Theile, wie hier der Stein ist mit einerley Stärke, diese Masse mag sich befinden wo wir sie nur hinbringen können, viel oder wenig über die Fläche der Erde erhoben seyn.

31. Zus. Worinnen nun auch die Schwere bestehen mag, so ist doch das offenbahr, daß wir uns vorstellen können als ob sie die Körper gegen die Erde zustiesse, und sie stösst einen Körper, er mag in allen den Stellen wo wir hinkommen können, und in allen den Stellen mit gleicher Stärke.

32. Zus. Wenn man einen Körper in A 4 F. fallen läßt, und er sich nach der Linie AP bewegt, so fällt er ohne Zweifel aus A herab, weil er in A einen gewissen Stoß von der Schwere bekömmt; Und weil die Schwere in C, P, u. s. w. überall wo er hinkömmt auch so würkt wie in A, so bekömmt er überall neue Stösse; jeder Stoß, erfordert wie alle Wirkungen eine gewisse Zeit. Wenn man sich also vorstellt, er habe die erste Geschwindigkeit mit der er aus A zu fallen anfing durch einen Stoß innerhalb einer gewissen Zeit erhalten, so ist der Stoß eben so stark den er in D, oder P u. s. w. in eben der Zeit erhält; Von jedem Stosse ent-

steht eine gewisse Geschwindigkeit. Diese Geschwindigkeit bleibt wenn keine äusserliche Ursachen sie ändern (24), und zu ihr kömmt immer eine neue durch den neuen Stoß; so wird also der Körper mit einer beschleunigten Bewegung fallen.

33. Zus. Wenn man ein paar Körper von gleichem Gewichte, das ist, die die Hand wenn man sie hält gleichstark drücken, z. E. ein paar bleyerne Kugeln von einer Grösse, neben einander hielte, daß sie einander berührten sonst aber nicht zusammenhiengen, und sie beyde in einem Augenblicke fallen liesse, so würden sie beyde in gleicher Zeit gleich tief fallen, und in einem Augenblicke die Erde erreichen: denn es ist nichts bey der einen das hier einen Unterschied von der andern verursachen könnte. Diese beyden Kugeln würden also hier zugleich so fallen, ohne daß eine der andern Bewegung beschleunigte oder hinderte. Und wenn man sie nun bey ihren Berührungspuncte an einander leimte oder sonst verbände, daß sie nun ein Ganzes ausmachten, so müsste dieses Ganze völlig so fallen wie zuvor die einzelnen Theile fielen, und den Erdboden genau in eben der Zeit erreichen. Denn weil keiner von den einzelnen Theilen in des andern Bewegung einen Einfluß hatte, so wird auch nun da sie zusammenhängen, jeder Theil eben so fallen, wie er von dem andern abgesondert gefallen wäre. Also fällt die doppelte Masse eben so wie die einfache. Und da man eben diesen Schluß von drey vier oder mehr gleichen Körpern machen

kann,

kann, die man jeden für sich in einem Augenblicke fallen liesse, und die auf einerley Art fallen werden sie mögen zusammenhängen oder nicht, so erhellt daß ein Körper der viel und einer der wenig Theile hat, eine grosse und eine kleine Masse, ein Centner und ein Quentchen, wenn sie zugleich zu fallen anfangen, in gleichen Zeiten gleich tief fallen werden. Der Wiederstand der Luft, der macht daß eine Feder langsam zu Boden flattert, wenn der Stein neben ihr schnell herabsinkt, wird hier beyseite gesetzt; daß dieser allein aber dergleichen Unterschied zwischen dem Falle der Feder und des Steines ausmacht, ist so offenbahr, daß sich die Physici schämen sollten, dieserwegen einen Versuch mit der Luftpumpe anzustellen, wenn sie sich anders schämen dürften zu spielen, und dieses nicht eine Schuldigkeit wäre die ihnen ihre Lehrlinge oft auflegen. Bey den Gesetzen der Beschleunigung des Falles hat man also auf die Menge der Masse, auf die Grösse des Gewichtes nicht acht zu geben, ein Körper wird wie der andere beschleunigt.

34. Zus. Das Gesetz dieser Beschleunigung zu finden, nehme ich noch bey 31 an, die Schwere bringe als eine absolute Kraft (27) in gleichen Zeiten gleiche Veränderungen in dem bewegten und in dem ruhenden Körper hervor. Fällt er also aus A wo er ruhig lag, in einer gewissen Zeit = T durch AB und in der nächst folgenden gleichen Zeit durch BC, und in der dritten eben so grossen Zeit durch CD, so wird er in B eine gewisse Geschwindigkeit

haben, die während des Falles durch AB von Nichts an, bis auf ihre Grösse erwachsen ist. So viel nun diese Geschwindigkeit beträgt; so viel wird auch zu ihr während des Falles durch BC hinzu kommen, so daß die Geschwindigkeit des Körpers in C noch einmahl so groß ist als in B. Wenn nähmlich die Schwere in B in ihn zu würken aufhörte, so könnte er, mit der Geschwindigkeit die er in B hat, in der Zeit T einen gewissen Raum = u mit gleichförmiger Bewegung zurücklegen. In der gleichen Zeit aber, würde er mit der Geschwindigkeit die er hat, wenn er von A bis C gefallen ist, den Raum 2u zurücklegen, wofern die Schwere erst in C in ihn zu wirken aufhörte. Dieses fließt aus der Voraussetzung, daß die Schwere wie eine absolute Kraft wirket. Denn so muß vermöge ihrer Wirkung in dem Körper eben so viel neue Geschwindigkeit in der zweyten Zeit als in der ersten entstehn, obgleich der Körper in der ersten aus der Ruhe sich zu bewegen anfieng, und in der zweyten Anfange schon eine Geschwindigkeit hatte. Eben so, bekömmt der Körper während seines Falles durch CD so viel neue Geschwindigkeit, als er während des Falles durch BC bekommen hatte; also hat er in D dreymahl so viel als in B, oder wenn die Schwere in D in ihn zu wirken aufhörte, würde er mit der Geschwindigkeit die er da hat in der Zeit T, gleichförmig den Raum 3u beschreiben, also verhalten sich die Geschwindigkeiten in B, C, D, wie die Zeiten die der Körper braucht durch AB, AC, AD, zufallen, und da man die erste Zeit

die

die für AB nöthig ist, so groß oder so klein als man will annehmen kann, so erhellt überhaupt, daß sich hier die Geschwindigkeit in P wie die Zeit verhält, die der Körper nöthig hat durch AP zu fallen.

Fällt also der Körper in einer gegebenen Zeit $=T$, durch die gegebene Höhe $AB=S$, und hat in B eine gegebene Geschwindigkeit $=C$; so sey $AP=s$; die Zeit die er braucht bis in P zu fallen $=t$; die dasige Geschwindigkeit $=c$; so ist $c=\frac{C.t}{T}$ und also, weil sich nur c, t, ändern, $dc=\frac{C}{T}.dt$, oder die Geschwindigkeit wächst, wie schon erinnert worden, in gleichen Zeiten gleichviel. Diese Bewegung nennt man **gleichförmig beschleunigt** (vniformiter acceleratum) (6).

35. Aufg. Die Vergleichung zwischen s und t zu finden.

Aufl. $ds=ecdt$ (15) $=\frac{e.C.tdt}{T}$ (33) also $s=\frac{eCt^2}{2T}$ weil $s=o$ für $t=o$. Wenn $t=T$ ist $s=S$; also $S=\frac{eCT}{2}$ oder $e=\frac{2S}{CT}$ und $s=\frac{S.t^2}{T^2}$. Sind also S, T, aus der Erfahrung bekannt, so findet sich s für jedes angenommene t, die Räume s : S verhalten sich also wie die Quadrate der Zeiten, oder der Geschwindigkeiten (33).

36. Zus. Wenn man die Zeit in lauter gleiche Theile, jeden = T eintheilt, so wird in m solchen Theilen, oder in der Zeit m T, der Raum m^2 S, und in m + 1 solchen Theilen, oder in der Zeit (m + 1) T, der Raum $(m+1)^2$ S beschrieben, also in dem m + 1 ten Zeittheile der Raum $(m+1)^2 - m^2$). S = (2 m + 1) S. Es ist aber 2 m + 1 die m + 1 te ungerade Zahl, wenn 1 die erste ist. Also wachsen die Räume wie die ungeraden Zahlen Es sind nähmlich T = 1 und S = 1 gesetzt.

Zeiten	0	1	2	3	4	5
Räume	0	1	4	9	16	25
Unterschiede		1	3	5	7	9

Wie groß eigentlich s für ein gegebenes t oder umgekehrt t für ein gegebenes s ist, findet man so daß man durch die Erfahrung bestimmt, was für ein S einem gegebenen T zugehört, oder, daß man, in einem einzigen Falle ausmacht, wie tief ein Körper in einer gegebenen Zeit fällt. Also nehme ich in der Folge S; und T, als Grössen an die durch die Erfahrung sind bestimmt worden.

Versuche, die erst weit unten (im II. Abschnitte 43. §.) können, erklärt werden, haben gelehrt, daß ein Körper in einer Secunde durch 15625 Tausendtheile eines Rheinländischen Fusses falle. Diese Länge sey = S; und T = 1 Sec. so ist $s = 15625 . t^2$; das ist, wenn man die Zeit des Falles in Secunden ausgedrücket hat, darf man nur dieser Zahl von Secunden ihr Quadrat mit

15625

15625 multipliciren, so hat man die Höhe des Falles in Tausendtheilchen eines rheinl. Fusses.

In 10 Secunden fiele ein Körper durch 1562500 solcher Tausendtheilchen oder durch 1562,5 Fuß.

37. Aufg. Aus der Höhe des Falles die Zeit zu finden.

Auflö. $t^2 = \frac{T.^2 f}{S}$ also $t = \frac{r f}{r S} . T$

38. Zus. Haben S, T, die Werthe (36) so ist $t = \frac{r f}{125}$ und daher ist die Zahl für S als eine Quadratzahl vorzüglich bequem, und wenn man die Höhe des Falles in Tausendtheilchen eines rheinländischen Fusses ausdrückt, so gibt die Quadratwurzel daraus mit 125 dividirt, die Zeit in Secunden. Statt der Division mit 125; kann man mit $\frac{1}{125}$, das ist mit 0,008 multipliciren.

Für $f = 1000\,000$ ist $t = \frac{1000}{125} = 1000 . 0,008 = 8$ oder durch 1000 Fuß fällt ein Körper in 8 Secunden.

39. Aufg. Wenn der Körper mit der Geschwindigkeit die er in P hat, ohne fernere Wirkung der Schwere, sich noch eben so lange als er herabgefallen ist, gleichförmig bewegte, den Weg x zu finden den er in dieser Zeit $= t$ zurücke legen würde.

Auflö. Es ist $x = ect$ (13) wo e eben das was in (35) ist, weil die Bewegungen durch df (35) und durch x, beyde gleichförmig sind, und also $df : x = cdt : ct$ (11) welches nicht wäre, wenn

e in (35) und hier nicht einerley bedeutete. Also

$$x = \frac{2S}{CT} \cdot \frac{C.t}{T} \cdot t \ (35.34) = \frac{2St^2}{T^2} = 2f$$

(35). Oder, mit der Geschwindigkeit die der Körper in P hat, und vermittelst des Falles durch A P erhalten hat, kann er in der Zeit die er gebraucht hat durch A P zufallen, noch einmahl so weit gehen, als die Höhe seines Falles beträgt.

So erhält er in einer Secunde durch den Fall eine Geschwindigkeit mit der er in einer Secunde 31,25 rheinl. F. durchlaufen kann.

40. Aufg. Zu finden, wie hoch ein Körper herabgefallen seyn müsste um dadurch eine gegebene Geschwindigkeit zu erhalten.

Aufl. Gesetzt er soll die Geschwindigkeit haben, vermittelst welcher er den Raum a in der Zeit b durchlaufen könnte. Man sucht die Höhe f, durch die er fallen muß diese Geschwindigkeit zu erlangen. Weil er durch den Fall von der bekannten Höhe S in der bekannten Zeit T (36) eine Geschwindigkeit C erhält, mit der er in dieser bekannten Zeit den Raum 2.S durchläuft (39) so verhalten sich die Geschwindigkeiten C und die gegebene, wie $\frac{2S}{T} : \frac{a}{b}$ (10). Da sich nun ihre Quadrate, wie die Räume verhalten, durch die ein Körper fallen muß, jede von ihnen zu erhalten (35), so ist $\frac{4S^2}{T^2} : \frac{a^2}{b^2} = S : f$ oder $f = \frac{T^2}{4b^2} \cdot \frac{a^2}{S}$

42.

41. Zus. Der Körper erlangt diese Geschwindigkeit in der Zeit (37) $t = \frac{aT}{2brS} \cdot \frac{T}{rS} = \frac{aT^2}{2bS}$

42. Ex. Ein Körper soll in 3 Minuten durch 7000 Fuß gehen. Will man also die Zahlen (36) gebrauchen, so ist $b = 3.60$ Sec. u. $a = 7000000$

Tausendth. also $f = \frac{1}{4.9.60.60} \cdot \frac{49000000000000000}{15625}$

Durch Logarithmen kann man dieses so berechnen

log 36 = 1,5563025
log 3600 = 3,5563025
log 15625 = 4,1938200

9,3064250
12 + log 49 = 13,6901961

4,3837711

giebt $f = 24197$

Die Zeit ist $\frac{7000000.1}{2.3.60.15625}$ Secunden.

also log 360 = 2,5563025
log 15625 = 4,1938200

6,7501225
6 + log 7 = 6,8450980

0,1449765

giebt $t = 1,3963$

Also erhielte der Körper diese Geschwindigkeit, wenn er 24,197 Fuß tief fiele, welches in 1,3963 Secunden geschähe.

43. Zus. Jede Geschwindigkeit, die ein Körper auch auf andere Art erhalten hat, könnte von dem Falle von einer gewissen Höhe herab herrühren. Dieser, einer gegebenen Geschwindigkeit c, zugehörige Höhe (altitudo velocitati debita) heisse v; wenn nun S einer andern Geschwindigkeit C zugehört, so ist $r S : r v = C : c$ (35). Wenn man also jede Geschwindigkeit durch die ihr zugehörige Höhe ausdrückt, so kann man allemahl $r v$ statt c schreiben, weil statt jeder andern Geschwindigkeit eben so die Quadratwurzel aus ihrer Höhe kömmt.

So wird in 35; $df = ecdt = \frac{2Sc}{CT} . dt$ nun $= \frac{2Sr v}{Tr S} dt = \frac{2r S . r v . dt}{T}$; Also in den Zahlen (36) $e = 2r S = 250$ und $df = 250r v . dt$.

Und weil e für alle gleichförmige Bewegungen einerley ist (13), so gehöre eine gewisse Geschwindigkeit der Höhe k in Tausendtheilchtn des rheinl. Fusses ausgedrückt zu, und h sey die Zeit in Secunden, so wird der Weg den der Körper mit dieser Geschwindigkeit in dieser Zeit zurücklegt, 250. h. r k Tausendtheilchen des rheinl. Fusses seyn.

44. Anm. Diese Gesetze fallender Körper hat Galiläus zuerst gewiesen Discorsi e dimostrazione matematiche intorno à due nuove scienze attenenti alla Mecanica & i Movimenti locali Leid. 1638. Sie finden sich daselbst im dritten Gespräche (giornata).

45. Aufg. Ein Körper wird von K 5 Fig. gerade in die Höhe geworfen. Die Geschwindigkeit mit

mit der man ihn wirft, und mit der er also zu steigen anfängt, ist so groß, als sie durch einen Fall von der Höhe k, wäre erlangt worden. In der Zeit t steigt er durch KQ = x Man sucht die Vergleichung zwischen x und t.

Aufl. Die Schwere wirkt hier des Körpers Richtung entgegen, wie sie zuvor ihr gemäß wirkte. Sie vermindert also des Körpers Geschwindigkeit eben so wie sie solche vorhin vermehrte, in gleichen Zeiten gleichviel, und der Körper steigt mit einer **gleichförmigen verminderten** Bewegung (motu vniformiter retardato). Wenn KL = k und er von K bis nach L gestiegen ist, so wird da die Geschwindigkeit mit der er anfieng völlich vernichtet seyn. Denn wenn er von L nach K herunter gegangen wäre, so hätten die Stösse der Schwere diese Geschwindigkeit in ihm erzeugt. So viel sie solchergestalt in ihm erzeugt hätten, so viel müssen eben die Stösse ihm wegnehmen, wenn er ihnen entgegen von K nach L steigt. Eben so muß er in Q die Geschwindigkeit haben, die er durch einen Fall von L bis Q bekäme. Denn seine Geschwindigkeit in Q muß so groß seyn, daß sie durch alle die Stösse, die er in dem Wege Q bekömmt, vernichtet wird, das ist so groß als sie durch alle die Stösse die er in dem Wege LQ bekäme könnte erzeugt werden. Also gehört seine Geschwindigkeit in Q; der Höhe k − x zu. Das Element Qq = dx, durchläuft er in der Zeit dt, so daß hier dx; dt, k − x sind, was in (43) df; dt, v, waren,

also $dx = \frac{2r S}{T} . r(k-x)\, dt$ oder $\frac{2r S}{T} . dt =$

$\frac{dx}{r(k-x)} = \frac{-dy}{ry}$ wenn $k-x = y$; Also $\frac{2r S}{T}$

$t = Const - 2y^{\frac{1}{2}} = Const - 2r(k-x)$; Nun ist für $t = o$; $x = o$; Also $o = Const - 2rk$ und $\frac{2r S}{T} . t = 2.(rk - r[k-x])$ oder $t = \frac{T}{rS} \cdot (rk - r[k-x])$. In den Zahlen (36) $t = o,oo8\,(rk - r[k-x])$ (38).

So wird die Zeit aus der Höhe gefunden. Umgekehrt ist $125t = rk - r(k-x)$ oder $k - x = k - 250t\,rk + 125^2 . tt$ also $x = 250t\,rk - 125^2 . t^2$ aus der Zeit, den zurückgelegten Raum zu finden.

46. Zus. In eben der Zeit hätte der Körper mit der anfänglichen Geschwindigkeit den Raum $250.t\,rk$ zurückgelegt (43), welcher um $125.125.tt$ grösser wäre als der würklich zurückgelegte Raum x. Der nur angeführte Unterschied ist also im Aufsteigen verlohren gegangen. Dieser verlohrne Raum kömmt lediglich auf die Zeit an, und ist für alle k einerley, d. i. zweene Körper die mit verschiedenen Geschwindigkeiten zu steigen anfangen, verlieren in gleicher Zeit, gleichviel Raum. der Verlust der Geschwindigkeit ist $rk - r(k-x)$ und also auch für einerley Zeit einerley $= 125\,t$, wenn gleich k verschieden ist. Dieß ist den Begriffen der gleichförmig veränderten Bewegung gemäß

mäß, wo die Verminderung sich nach der Zeit, nicht nach dem richtet was anfangs da war.

47. Zus. Für $x = k$ ist die Zeit des Aufsteigens durch die ganze Höhe KL; $= o,oo8.\sqrt{k}$ so groß als die Zeit in welcher der Körper eben so hoch durch LK herabgefallen wäre (38), wie man leicht voraussehen konnte. Und heisst diese Zeit $= b$ so ist $k = 125.125.bb = 15625\,bb$.

So hoch müsste ein Körper gestiegen seyn, wenn von dem Augenblicke an da man ihn senkrecht in die Höhe warf, bis an den Augenblick da er wieder an seine erste Stelle zurückfiele, die Zeit $2b$ verflossen wäre.

Für einen Körper der auf diese Art eine Minute lang unterwegens wäre, wäre $b = 30$ Sec. und er wäre also in 30 Sec. der Minute erster Hälfte auf 15625.900 Tausendtheilchen des rheinl. F. $= 14062,5$ Fuß gestiegen. Diese Höhe gehörte der Geschwindigkeit zu mit der man ihn aufwärts warf. Die zweyte Hälfte der Minute über erlangte er eben die Geschwindigkeit durch den Fall wieder. Diese Geschwindigkeit ist (39) so groß, daß er damit in 30 Secunden 28125, oder in einer Secunde 937,5 Fuß durchlaufen würde. Eine solche Geschwindigkeit liesse sich z. E. durch Pulver gar leicht hervorbringen, wenn nach Eulers Rechnung (Erläuterte Artillerie 128 S.) bey einem gewissen Versuche die Geschwindigkeit einer geschossenen Kugel 1625 F. in einer Secunde betrug. In der Natur aber, ändert der Widerstand der Luft alles

was von den Gesetzen fallender Körper ist gesagt worden, mehr oder weniger, nachdem er mehr oder weniger beträchtlich ist.

III. Cap.

Allgemeine Gesetze der Wirkungen der Kräfte

Bewegende und beschleunigende Kraft.

48. **Grundsf.** Wenn in die Masse b die ganze Kraft q wirkt, so wirkt in einen Theil der Masse $\frac{1}{n}$ b, der Theil der Kraft $\frac{1}{n}$ q.

Wenn ich meine Hand mit einer gewissen Gewalt anstrenge, eine Last zu erhalten oder zu heben, so kömmt offenbahr auf die halbe Last, die Hälfte dieser Gewalt, der dritte Theil auf den dritten Theil u. s. w. D. i. alles würde vollkommen so wie jezt erfolgen, wenn ich den zehnten Theil meiner Gewalt anwendete, und nur den zehnten Theil der Last vor mir hätte. Man kann sich hier meine Gewalt aus so viel Theilen zusammengesetzt vorstellen, so viel Theile die Last hat, jeder Theil der Gewalt bringt in seinem Theile der Last das hervor, was der andere in dem seinigen hervorbringt, daher geht in jedem dieser zehn Theile der Last, alles so vor, wie es vorgehen würde, wenn sie nicht zusammen hingen, und jeder einzeln die Wirkung des zehnten Theiles der Gewalt empfände.

49. **Erkl.** Die ganze Gewalt die in eine Masse wirkt, heisst die **bewegende Kraft** (vis motrix) die

die welche in jeden Theil wirkt, die beschleunigende (acceleratrix).

Zwey Pfund sind noch einmahl so schwer als ein Pfund, also haben sie noch einmahl so viel bewegende Kraft. Aber jeder Theil der zwey Pfund ist so schwer als ein gleich grosser Theil des einen Pfundes, also ist die beschleunigende Kraft in beyden einerley. Man stellt sich nähmlich die Wirkung der Schwere in eine schwere Materie die aus lauter gleichen Theilen bestünde, so vor, daß sie jeden Theil gleich stark stösst; Eine Masse also die aus mehr Theilen besteht, bekömmt nach dieser Verhältniß mehr Stösse, aber jeder Theil von ihr wird auf einerley Art gestossen, er mag mit den übrigen verbunden, oder einzeln und ohne Zusammenhang mit ihnen seyn. Daher sinken viel Theile die zusammenhängen, eben so wie wenig Theile (33). Und dieses wird die Ursache der Benennungen erläutern. Zwey Pfund die sinken, haben mehr Bewegung, als ein Pfund, eben deßwegen weil sie einerley Geschwindigkeit haben, und bey einerley Geschwindigkeit offenbahr da mehr Bewegung ist, wo mehr Masse ist. Also ist das was beyde Gewichte **beschleunigt** einerley, und eben deßwegen hat die grössere Masse mehr bewegende Kraft.

Man setze ein Pfund, auf eine Fläche, wie eine Tafel, von einem Quadratfusse, die aber für sich kein Gewicht hat: Auf eben eine solche Fläche von 2 Quadratf. setze man zwey Pfund. Die letzte Tafel wird dadurch noch einmahl so schwer werden

als

als die erste. Aber jeder Theil der letzten, wird nur eben so stark beschwert als ein gleicher Theil der ersten. Denn die zwey Pfund theilen ihre Last in noch einmahl so viel Theile ein als das eine. Die bewegende Kraft der letzten Tafel wird also noch einmahl so groß, ihre beschleunigende Kraft aber eben so groß seyn, als die ähnlichen Kräfte der ersten sind.

50. Zus. Wenn der beyden Massen a, b, bewegende Kräfte p, q, sind, so verhalten sich ihre beschleunigenden Kräfte wie $\frac{p}{a} : \frac{q}{b}$. Denn es sey a=me; b=ne so verhalten sich die beschleunigenden Kräfte, wie die Theile der bewegenden, die auf gleiche Stücken e beyder Massen kommen, das ist wie $\frac{p}{m} : \frac{p}{n}$ welches vorige Verhältniß giebt.

Wenn 3 Pf. auf einer Tafel von 5 Quadratfuß, und 7 Pf. auf einer von 19 F. lägen; so käme auf einen Quadratfuß, der ersten $\frac{3}{5}$ Pf. und der zweyten $\frac{7}{19}$, so würden sich also die beschleunigenden Kräfte verhalten.

51. Zus. Umgekehrt wenn f; g; die beschleunigenden Kräfte in den Massen a, b, sind, so ist die Verhältniß der bewegenden fa:gb.

Wie stark ein Stein meine Hand druckt lehrt mich die Empfindung; dieser Druck, ist ohne Zweifel die Summe von allen einzelnen Drucken der Theile des Steines, da jeder dieser Theile mit einer gewissen Stärke die für alle einerley ist, durch

die

die Schwere gestossen wird. Der ganze Druck kömmt also heraus, wenn man einen solchen Stoß (die beschleunigende Kraft) durch die Menge der Theile (die Masse) multiplicirt. Es wäre ja bey einer andern Einrichtung der Natur möglich gewesen, daß eben der Stein, ohne mehr oder weniger Theile zu bekommen, meine Hand noch einmahl so stark gedruckt hätte. In dem Falle würde der Stoß der Schwere auf jeden Theil des Steins, noch einmahl so stark gewesen seyn, als er jetzt auf eben dem Theil ist. Gesetzt nun ich legte in einer Welt, wo diese doppelt so starke Schwere statt fände, nicht eben den Stein, sondern einen andern der dreymahl soviel Theile hätte auf meine Hand, so würde jeder Theil dieses dreyfachen Steines mich noch einmahl so stark, und der ganze Stein würde mich 3. 2 = 6 mahl so stark drücken als der einfache mich in der jetzigen Welt drücket. Hier wäre f = 1; g = 2; a = 1; b = 3 und fa : gb = 1 : 6.

Bey einem schweren Körper, ist also die beschleunigende Kraft, die Stärke des Stosses den die Schwere auf jedem Theil ausübt, die bewegende, sein Gewicht, nähmlich die Stärke des Stosses so vielmahl genommen, so viel Theile der Körper hat. Daher ist es gut diese beyden Wörter, jedes in seiner eigenen Bedeutung zu gebrauchen, und durch Schwere die beschleunigende Kraft, nicht aber das Gewicht anzuzeigen. „Die Schwere eines „Centners ist 100 Pf.„ ist ein gewöhnlicher Ausdruck, statt dessen ich aber lieber sagen wollte: „das Gewicht eines Centners ꝛc.„

Etwas wie eine solche Schwere die von der unsrigen unterschieden wäre, kann man sich so vorstellen: Ueber die Rolle D, 6 Fig. gehe das Seil CDA, da bey A ein grösser Gewicht als bey C hänge; folglich wird A sinken wollen; Es zu unterstützen, wäre nur eine Kraft A – C nöthig. Man hat also hier eine Masse A, die die Hand, von der sie unterstützt wird, nicht so stark drückt, als sonst eine Masse von eben der Grösse thun würde. Die Verbindung zwischen A und C, macht daß es eben so viel ist, als wäre die Rolle nicht da, sondern es befänden sich beyde Massen A und C zusammen über der Hand, es druckte aber A mit seinem Gewichte niederwärts, C mit den seinigen aufwärts, so würde von der Hand zwar die Masse A+C, aber nur ein Gewicht das so groß wäre als der Unterschied beyder Gewichte, getragen werden. Man stelle sich die Massen in Theile von einerley Grösse in beyden getheilt vor; die Stärke des Stosses den die Kraft der Schwere jedem solchen Theile giebt heisse g; so ist der Masse A Gewicht g. A niederwärts, und eben so der Masse C Gewicht, wenn sie an dem Seile hängt niederwärts = g. C. Wenn sie sich aber auf der Hand unter der Masse A befindet, so ist dieses Gewicht aufwärts gerichtet und das vereinigte Gewicht der Massen A und C wie sie so auf der Hand liegen niederwärts = g. A – g. C; wo man das aufwärts gerichtete als verneint ansehen kann. Also hat über der Hand eine Masse A + C die bewegende

Kraft

Kraft g. (A − C) und folglich die beschleunigende $\frac{g.(A-C)}{A+C}$.

Es sey g. A = 10 Pfund, g. C = 1 Pf. so ist die bewegende Kraft 9 Pf. und weil die Masse welche bewegt ist, A + C = 11 C ist, so kömmt die beschleunigende Kraft $\frac{g.(10C-C)}{11.C} = \frac{9}{11}$ g; oder es ist so viel, als würkte in jeden Theil dieser Masse, eine Schwere die $\frac{1}{11}$ der unsrigen wäre.

Ein anderes Beyspiel einer solchen Veränderung der Schwere gibt die Statik. AB 6 F.* sey eine schiefe Fläche, CB horizontal, AB senkrecht. Das Gewicht P auf ihr nach einer Richtung die mit AC parallel geht zu erhalten, ist eine Kraft $\frac{P.AB}{AC}$ nöthig (Statik 98.). Wenn also der Masse P bewegende Kraft nach der Verticallinie, durch P ausgedruckt wird, so ist $\frac{P.AB}{AC}$ ihre bewegende Kraft nach der Linie AC; und folglich ihre beschleunigende Kraft nach dieser Linie $= \frac{AB}{AC}$ wenn die beschleunigende Kraft nach der Verticallinie = 1 gesetzt wird. Wäre C = 30 Gr. also AB = $\frac{1}{2}$ AC; so wollte P längst AC so hinabgehen, als würde es von einer Kraft getrieben, die unserer Schwere ähnlich, nur halb so groß, und statt der Verticallinie, nach AC gerichtet wäre.

Betrachtungen, über die Veränderung der Geschwindigkeit, welche beschleunigende Kräfte bey wirklichen Bewegungen verursachen.

51. Lehrs. Jede Kraft strebt Bewegungen hervorzubringen.

Bew. Der Zustand eines Körpers, ist Ruhe oder Bewegung. In jenem Falle ändert er sich nur so daß die Ruhe sich in Bewegung verwandelt, in diesem nur so daß die Bewegung vermehrt oder vermindert wird. Was Ruhe in Bewegung zu verwandeln oder die Bewegung zu vermehren strebt, das strebt ohne Zweifel Bewegungen hervorzubringen. Und eben so, was Bewegungen durch entgegengesetzte vermindert wie etwa die Schwere die Bewegung des Aufsteigens (45). So weit also strebt vermöge (27) jede Kraft, Bewegungen hervorzubringen. Nur zwo Ausnahmen scheinen hievon zu machen. Die Trägheit mindert Bewegungen. Eine Kugel die ich an eine andere ruhende anschiebe, verliert dadurch etwas von ihrer Geschwindigkeit, und man sagt der Wiederstand der ruhenden Kugel, ihre Trägheit, habe ihr solches benommen. Hierüber habe ich mich schon 22 u. f. erklärt. In den Fällen da man sagen kann die Trägheit übe **Gegenwürkungen** aus, kann man auch sagen sie stelle die Erscheinung einer Kraft dar, sie vermindert Bewegungen eben so, wie entgegengesetzte Bewegungen solches thun würden. Aber

strebt

strebt sie wohl Bewegungen zu vermindern? Schwerlich kann man ein Wort von ihr gebrauchen, das eine beständige Thätigkeit, eine Bemühung zu wirken, die allenfalls nur durch Hindernisse aufgehalten würde, anzeigt, da sie ganz unthätig scheint, so lange sie nicht Gelegenheit hat sich einer Wirkung entgegen zu setzen. Eben das, daß die Trägheit nie strebt Bewegungen hervorzubringen, macht es bedenklich, ihr den Namen Kraft beyzulegen. Will man solches thun, so macht sie allein eine ganz besondere Gattung von Kräften aus, von der alle übrigen unterschieden sind.

Eine andere Art von Dingen, die Bewegungen ändern, oder eigentlich gar aufheben, ist die unüberwindliche Festigkeit unbeweglicher Körper; eines Tisches auf den man ein Gewicht fallen lässt, eines Nagels an den man was henkt, das herabfallen würde wenn man es trüge. In eigentlichen Verstande sagt man auch nicht daß solche Dinge eine Kraft hätten, was man ihnen zuschreibt ist ein blos **leidender Widerstand** (resistentia mere passiua).

52. Zus. Die Wirkung einer Kraft, besteht entweder in einer wirklichen Bewegung, oder in einem blossen Drucke, wenn jene gehindert wird.

So macht die Schwere daß ein Körper wirklich fällt, oder daß er die Hand druckt die ihn aufhält.

53. Zus. Wenn also ein paar beschleunigende Kräfte, jede in ihren Körper würkt, so kann man diese beyden Würkungen unter zweyerley Umstän-

de mit einander vergleichen: 1) wenn keine Bewegung, 2) wenn eine erfolgt.

54. Zus. Im ersten Falle wird es natürlich seyn, die Vergleichung durch den Druck den die Körper ausüben anzustellen. Diesen Druck könnte man als die bewegende Kraft ansehen; und wenn also die Masse m von der einen beschleunigenden Kraft f, die Masse M von der andern F getrieben würde, und der Druck der ersten Masse sich zum Druck der andern wie p:P verhielte, so würde man aus 51. setzen fm:FM=p:P.

55. Zus. Aber wenn eben diese beschleunigenden Kräfte ihre Massen würklich bewegen, so fragt es sich wie da ihre Wirkungen zu vergleichen wären? Auf die Massen selbst, kömt hier nichts an, weil jede beschleunigende Kraft, so zu reden, mehrmahl in mehr Theile wirkt. Eigentlich zeigt f:F hier die Verhältniß der Stärke der Stösse an; Von denen Stössen, deren Stärke durch f ausgedrückt wird, geschehen in die Masse m so viel, so viel sie Theile hat, und von denen welcher Stärke F anzeigt, in die Masse M so viel, so viel diese Masse der vorigen gleiche Theile hat, und bey der wirklichen Bewegung, kömmt es, ob M schneller oder langsamer als m gehen soll, nicht darauf an, ob M mehr oder weniger Theile hat, denn wenn f=F wäre, so würden sich beyde Massen auf einerley Art bewegen, wie sich auch die Mengen ihrer Theile verhielten, und jeder Theil der Masse m, er mag einzeln oder in Verbindung mit den andern

dern betrachtet werden, bewegt sich auf einerley Art, so wie ihn seine Kraft f treibt (49). Also hat man die Wirkungen der beschleunigenden Kräfte, blos nach der Bewegung die jede in einer gewissen Zeit hervorbringt zu schätzen, ohne auf die bewegten Massen zu sehen.

56. Zus. Wenn man Bewegung betrachtet, ohne auf die bewegte Masse zu sehen, so bleibt weiter nichts übrig als daß in einer gewissen Zeit, ein gewisser Raum zurückgelegt wird. Wenn also die Kraft f macht, daß dasjenige was sie bewegt in einer gewissen Zeit durch den Raum z geht, und die Kraft F macht, daß was sie bewegt in eben der Zeit durch den Raum Z geht, so würde es wohl natürlich seyn, diese Kräfte in so fern sie Ursache sind daß diese beyden Räume beschrieben werden, nach den Räumen als ihren Wirkungen zu vergleichen, und also $f:F = z:Z$ zu setzen.

57. Zus. Wenn die Kräfte nach eben dem Gesetze wie unsere Schwere beschleunigen, und für irgend eine Zeit T, die in ihr beschriebenen Räume $z:Z$ sich wie $f:F$ verhalten, so werden sich die Räume die in jeder andern Zeit $m\,T$ vermöge dieser Kräfte beschrieben werden auch so verhalten. Denn nach dem angenommenen Gesetze sagt man (35) $T^2 : m^2\,T^2 = z : m^2\,z$ welches den Raum gibt der vermöge der Kraft f in der Zeit $m\,T$ zurückgelegt wird, und eben so wird in dieser Zeit, $m^2 Z$ vermöge der Kraft F zurücke gelegt. Diese Räume aber verhalten sich wie die beyden vorigen. Es erhellt daß m auch kleiner als 1 seyn kann.

58. Zus. Wenn die Zeit T endlich ist, so kann man nicht den ganzen Raum z als die Wirkung der beschleunigenden Kraft ansehen, und es erforderte eine besondere Untersuchung auszumachen wieviel eigentlich von der beschleunigenden Kraft herrührt, denn wenn die Kraft, in der Hälfte der Zeit, oder sonst in einem Augenblicke zu beschleunigen aufhörte, so würde doch in dem rückständigen Theile der Zeit, ein Theil des Raumes, mit der schon erlangten Geschwindigkeit beschrieben werden (33). Diese Betrachtung könnte zweifelhaft machen, ob sich die Räume wie die Kräfte verhalten müssten, von denen sie eigentlich nicht die unmittelbaren Wirkungen sind. Daher kann man die Zeit unendlich klein annehmen, wo die Beschleunigung beyseite gesetzt wird (14) und jeder Raum völlig als die Wirkung der Kraft in dieser Zeit anzusehen ist. Wenn ich einen Körper auf einer horizontalen Ebene fortschiebe, wo er jeden Augenblick stehen bleibt, so bald ich zu schieben aufhöre, so ist der Raum durch den ich ihn fortgeführet habe, völlig die Würkung meiner Kraft, und ihn in eben der Zeit, auf eben die Art noch einmahl so weit zu führen würde noch einmahl so viel Kraft erfordern. Wie ich in diesem Gleichnisse annehme, daß in der endlichen Zeit keine Beschleunigung erfolgt, so setzt man bey gegenwärtiger Untersuchung zum voraus, daß diese Beschleunigung die unendlich kleine Zeit über wegfalle. Der 57. Art. zeigt nun, daß diese Räume, die man eigentlich als Würkungen der beschleunigenden

Kräfte

Kräfte ansehen dürfte, sich eben so verhalten wie jedes Paar andrer in gleichen Zeiten beschriebene Räume; und daß man also die Verhältniß der beschleunigenden Kräfte, durch endliche Räume, die sich abmessen lassen angeben kann.

Gesetzt ein Körper der 4 Fig. durch A P gefallen wäre, hätte in P die Geschwindigkeit c, mit welcher er in der Zeit d t, den Raum P π = e c d t durchlaufen würde, wenn ihn die Schwere diese Zeit über nicht beschleunigte, oder er in P keinen neuen Stoß von der Schwere bekäme; wenn er aber diesen neuen Stoß bekömmt, so durchläuft er in dieser Zeit mit der Geschwindigkeit c + d c den Raum P p = e. (c + d c) d t: so ist π p = e. d c. d t das was eigentlich wegen der Wirkung der Schwere diese Zeit über ist beschrieben worden, und verhält sich also, wenn d t einerley bleibt, wie d c.

59. Zus. Hier also sind f, F, Kräfte von den Bewegung herrührt. Vorhin (54) waren es Kräfte vermöge der die Massen druckten. Man darf also nicht ohne Beweis annehmen, daß beyder Vergleichungen ihrer Wirkungen mit einander bestehen können. Denn f, F, könnte in 54. was anders als in 56. bedeuten; weil Kräfte die Bewegung und Kräfte die Druck verursachen, wohl zweyerley seyn könnte. In der That stellen wir uns freylich vor, daß der Druck daher rührt, weil sich die Masse die ihn ausübt bewegen will, und aufgehalten wird, und daß umgekehrt Bewegungen erfolgen, wenn der Druck nichts aufhält, aber man kann allemahl noch

fragen, ob eben die Masse, die den doppelten Druck ausübt, wenn sie sich wirklich bewegte, auch die doppelte Bewegung haben würde, ob nähmlich überhaupt wenn m = M wäre sich zugleich der Druck von m zum Drucke von M, und z : Z, beydes wie f : F verhalten könnte. Wenn die Masse Q auf meiner rechten Hand mich so stark druckte als die Masse 2. Q auf meiner linken, so würde ich sagen, die Schwere, in so fern sie eine Kraft ist von der Druck herrührt, sey über meiner rechten Hand noch einmahl so stark als über meiner linken, aber wenn ich die Massen Q und 2 Q beyde in einem Augenblicke fallen liesse, würde ich wohl schliessen dürfen, daß in der ersten kleinen Zeit vom Anfange des Falles, Q noch einmahl so tief fallen würde als 2 Q, das ist, daß die Schwere über meiner rechten, in so fern sie Bewegungen verursacht auch noch einmahl so stark ist als über der linken? Mich deucht es darf wenigstens nicht ohne Beweis angenommen werden daß eines aus dem andern folgt. Die Schwere könnte über meiner rechten Hand wohl noch einmahl so stark **drucken**, ohne noch einmahl so schnell zu **bewegen**; und wer dieser Schwürigkeit noch mehr Gewicht geben wollte, dürfte sich nur darauf berufen, daß die Masse beym Drucke, aber nicht bey der Bewegung in Betrachtung gezogen wird, (32) und also die Verhältniß der Kräfte aus dem Drucke zu schätzen, hierinnen was in Betrachtung kömmt, das beyseite gesetzt wird, wenn man ihre Verhältniß aus der Bewegung schätzt.

60. Zus. Sollen also beyde Ausdrückungen (56; 54.) zugleich wahr seyn, so muß meines Erachtens, folgendes dargethan werden: Eine Kraft die unserer Schwere ähnlich, aber stärker oder schwächer als sie ist, wirke in einer Masse, die ich auf der Hand liegen hätte, so daß ich diese Masse zu halten n mahl mehr Kraft brauchte, als wenn die gewöhnliche Schwere, in diese Masse wirkte, d. i. daß diese Masse, ohne mehr oder weniger Theile bekommen zu haben, mich n mahl stärker druckte, n mahl schwerer wäre, so wird eben die Masse n mahl so tief fallen, als sie in eben der Zeit fällt, wenn die Schwere in sie wirkt, oder als jeder anderer Körper vermöge der Schwere bey uns fällt (32). Dieses ist die Absicht folgender Untersuchungen.

61. Lehrs. Ein Körper wie ihn unsere Schwere niederwärts treibt, würde in einer unendlich kleinen Zeit durch den Raum A B; 4 F. fallen. Ich sage, ihn diese Zeit über aufzuhalten, (wie wenn man ihn so lange auf der Hand trüge,) ist eben so viel als seine Masse, die nur träge aber nicht schwer wäre, in dieser Zeit durch B A zu führen, daß also meine Hand den blos trägen Körper durch B A zu führen, eben die Bemühung anwendet, als den schweren Körper in A zu erhalten.

Bew. Indem meine Hand den schweren Körper diese Zeit über hält, so leidet sie beständig seinen ganzen Druck, und hindert beständig daß der Körper nicht durch A B fällt. Eine Begebenheit

hindern

hindern daß sie nicht geschiht, oder diese Begebenheit, nachdem sie erfolgt ist, wieder aufheben, und gleichsam ungeschehen machen, das beydes ist wohl einerley. Ich setze also statt der Bemühung mit welcher meine Hand das Sinken des Körpers hindert, diejenige Bemühung mit welcher sie dieses Sinken ungeschehen machte, das heisst: den Körper wenn er in einer gewissen Zeit bis nach B gesunken wäre, in der nächstfolgenden gleichen Zeit wieder in die Stelle A, aus der er sank, zurückbrächte. Während dieser zweyten Zeit aber, müsste die Schwere nicht in den Körper würken, denn sie hatte schon die erste Zeit gewirkt den Körper zu senken, und wenn sie also diese Zeit noch fortführe zu wirken, so hätte die aufhebende Hand, mit zwo Wirkungen der, der vorigen und der, der jetzigen Zeit zu thun; da doch die Frage nur ist wie die Wirkung der ersten Zeit soll aufgehoben werden.

Wäre der Körper wirklich durch AB gefallen, so hätte er in B eine gewisse Geschwindigkeit, mit welcher er aus B weiter fortgehen würde, wenn auch die Schwere da in ihn zu wirken aufhörte; mit welcher er in B auf etwas das ihn da aufhalten wollte, stossen würde. Die Hand, die ihn durch BA zurücke führen, und dabey eben das thun soll, was eine Hand thäte, die ihn in A erhielte, braucht diese Geschwindigkeit nicht zu zernichten, diesen Stoß nicht erst auszuhalten. Denn wenn beyder Hände Bemühungen gleichgültig seyn sollen, so entsteht diese Geschwindigkeit nicht, weil der Körper

nicht

nicht fällt. Die erhaltende Hand, braucht ohne Zweifel einerley Bemühung in welcher Stelle der Linie A B sie den Körper auch erhält. Man lasse sie also, die Zeit d t über, den Weg A B hinunter gehen, und immer den Körper tragen: So wird sie eben das leiden, als wenn sie ihn diese Zeit über in A erhalten hätte; der Körper aber wird vermöge der Schwere durch A B gesunken seyn: denn wäre er nicht schwer gewesen, so wäre er in A ruhig geblieben, wenn gleich die Hand unter ihm weg nach B gegangen wäre; die Hand zog ihn nicht nach sich, sie verstattete ihm nur sie zu begleiten, und ohne Schwere hatte er keinen Trieb sie zu begleiten. Gleichwohl wird solchergestalt der Körper in B keine Geschwindigkeit haben, denn er ist nicht durch A B gefallen, sondern hinabgetragen worden; die Geschwindigkeit entsteht nur aus dem wirklichen Falle; Sonst müsste ein Stein den ich in der Tasche einen Berg hinab trage, unten im Thale die Geschwindigkeit haben, die er haben würde, wenn er vom Berge ins Thal herabgestürzt wäre. Hier hat also die Schwere den Körper durch A B gesenkt, ohne daß in B eine Geschwindigkeit entstanden wäre, und die tragende Hand hat dabey beständig eben das gethan, was sie gethan hätte, wenn sie ihn diese Zeit über in A erhalten hätte. Soll also die erhebende Hand eben das thun, das ist, soll sie das geschehene ungeschehen machen, so muß sie den Körper, wie er in B ruht, und bloß träg, aber nicht schwer ist, wieder durch B A hinaufführen, und zwar in eben so viel Zeit, weil es in mehr oder we-

niger

niger Zeit verrichten, heissen würde: in eben so viel Zeit weniger oder mehr thun.

Auf eben den Schluß werde ich folgendergestalt kommen: Man setze, der blos träge Körper, ruhe ohne einige Wirkung der Schwere in A; Meine Hand aber führe ihn in der Zeit dt durch Ab hinauf. Das wäre also die Wirkung meiner Hand diese Zeit über in dem blos trägen Körper. Diese Wirkung wird völlig aufgehoben, wenn die Schwere in den Körper wirkt, und meine Hand ihn solchergestalt eben so lange in A erhält. Die Schwere müsste also, wenn sie alleine gewesen wäre, in dem blos trägen Körper, diese Zeit über eben das, nur entgegengesetzt gewirkt haben, was meine Hand in dem blos trägen Körper wirkte, das ist, der Druck müsste ihn durch den Raum AB = Ab gesenkt haben. Wenn den Körper zugleich, in einerley Zeit, eine Gewalt durch AB senken, und eine andere durch Ab = AB erheben will, so wird er ohne Zweifel in A bleiben, und auch sonst nicht, als wenn Ab = AB.

62. Zus. Diese Schlüsse sehen die Schwere blos als eine absolute (27) überall gleich stark wirkende (30) Kraft an vermöge der ein Körper druckt, und wenn er nicht gehindert wird sinkt. Ob eine gegebene Masse vermöge dieser Kraft so und so stark druckt, so und so tief sinkt, das hat in sie keinen Einfluß. Sie gelten also von jeder andern Kraft die der Schwere in den erwähnten Stücken ähnlich, nur stärker oder schwächer wäre: wie 50. erklärt.

63. Grundf.

63. Grundſ. Die Maſſe n. m in einer gewiſſen Zeit durch einen gewiſſen Raum führen, heiſſt n mahl ſo viel thun, als die Maſſe m durch eben den Raum in eben der Zeit führen.

Denn man kann ſich ſtatt der groſſen Maſſe, n Maſſen jede = m vorſtellen, in deren jeder das geſchiht, was in der einzigen m geſchiht.

64. Grundſ. Die Maſſe m durch den n fachen Raum führen, heiſſt n mahl ſo viel thun als ſie in eben der Zeit durch den einfachen führen.

Denn wenn die Maſſe einerley bleibt ſo thut man in eben der Zeit nur in ſo fern mehr, in ſo fern man ſie durch einen gröſſern Raum führt.

65. Aufg. In L 5 Fig. befinde ſich die Maſſe m; in A 4 Fig. die Maſſe n. m, zwo Kräfte, die unſerer Schwere ähnlich, nur an Stärke von ihr unterſchieden ſind, wirken in dieſe Maſſen; in m die beſchleunigende Kraft p; in n. m die beſchleunigende Kraft $\frac{1}{n}$p (49). Das heiſſt gleiche Theile der Maſſen m; n m, üben, jener den Druck p, dieſer den Druck $\frac{1}{n}$p aus, daß alſo der ganze Druck beyder Maſſen gleich iſt, oder die eine Maſſe in L die andere in A zu erhalten, gleichviel Gewalt, nähmlich m. p = n m. $\frac{1}{n}$p nöthig iſt (50). Würden ſie aber da nicht erhalten, ſo ſänke m durch L Q in der Zeit in welcher n. m durch A B ſinkt. Ich ſuche die Verhältniß der Räume L Q : A B.

Aufl. Eine Hand welche dieſe Zeit über m in L erhält, thut eben das was n Hände zuſammen thaten, deren jede, eben ſo lange eine von den n Maſ-

ſen

sen in A erhielte. Aber eine gewisse Zeitlang den ganzen Druck m p in L oder den ganzen Druck n m. $\frac{1}{n}$ p in A erhalten, ist so viel, als in dieser Zeit, die Massen m durch Q L oder n. m durch B A erheben (61). Da sich also erhalten statt erheben setzen läßt, so werden folgende Schlüsse zusammenhängen, wo ich allemahl einerley Zeit verstehe.

I) m durch Q L erheben ist so viel als n. m durch B A erheben.

II) n. m durch B A erheben, ist n mahl so viel als m durch B A erheben (63). Also ist

III) m durch Q L erheben, n mahl so viel als m durch B A erheben. Aber

IIII) m durch n. B A erheben, ist n mahl so viel als m durch B A erheben (64). Also ist

V) m durch Q L erheben, so viel als m durch n. B A erheben (III; IIII).

Nun ist

VI) Eine Masse durch einen gewissen Raum erheben, ohnstreitig nicht so viel als eben die Masse durch einen andern erheben. Daher können die beyden Räume (V) nicht unterschieden seyn, oder es ist

VII) Q L = n. B A.

Es verhält sich also der Druck der in jeden Theil der ersten Masse wirkt, zu dem Drucke der in jeden gleichen Theil der andern Masse wirkt, wie der Weg der ersten Masse zum Wege der zweyten. Auch wenn die Wege in endlichen Zeiten beschrieben werden (58).

66. Erkl.

66. Erkl. Eine unveränderliche Kraft heisse ich, vermöge der eine gegebene Masse überall gleich stark druckt, eine veränderliche vermöge der diese Masse in andern Stellen anders druckt.

So ist die Schwere unveränderlich (28). Wenn einerley Masse zu erhalten in L 5 Fig. mehr oder weniger Kraft nöthig wäre, als in irgend einer andern Stelle z. E. Q der Linie LQ, so würde die Kraft vermöge der die Masse längst LQ hinabgetrieben wird, veränderlich seyn.

67. Zus. An jeder Stelle, L oder Q, wird sich der Druck den die Kraft da verursacht, mit dem Drucke vergleichen lassen, den die Schwere verursachen würde. Wenn z. E. einen Cubikzoll Bley zu erhalten, in L dreymahl, in Q viermahl so viel Gewalt nöthig wäre, als bey der Wirkung unserer Schwere nöthig ist, so würde die Kraft in L dreymahl, in Q viermahl so stark als unsere Schwere seyn. Sie lässt sich also als eine veränderliche Zahl ansehen, die sich auf die Schwere als eine unveränderliche Einheit bezieht; so wäre die Schwere (51) g = 1 gesetzt, diese Kraft in L = 3 in Q = 4 und könnte überhaupt als eine veränderliche Grösse f betrachtet werden, das ist f : g oder f : 1 wäre eine Verhältniß von der sich nur das vorhergehende Glied änderte.

68. Zus. Diese Veränderung, wird, wie alles was in der Natur geschiht, durch unendlich kleine Stufen geschehen. Ist Qk 5 Fig. unendlich klein, so wird die Kraft in Q = f in k aber = f + df seyn.

69. Zus. Man kann also dergleichen Kraft sich allemahl wie eine veränderliche Schwere vorstellen. Sie wird sich nähmlich von der Schwere in nichts unterscheiden, als daß sie nicht überall gleich stark ist.

70. Aufg. Ein Körper in den eine veränderliche Schwere beständig wirkte, ist in der Zeit t, durch die Linie L Q = x gegangen, und hat in Q die Geschwindigkeit u, und die Kraft in Q ist = f. Man fragt wieviel seine Geschwindigkeit in der unendlich kleinen Zeit d t zunehmen wird.

Aufl. Man setze, in eben den Körper hätte unsere unveränderliche Schwere gewürkt. Er wäre in eben der Zeit durch die Linie A P = y (4 F.) gefallen, und hätte da die Geschwindigkeit c. In der Zeit d t, legt er wegen der Wirkung der Schwere den Raum e. d c. d t zurück (58). Und eben so muß er in gegenwärtiger Aufgabe, in eben dem Zeittheilchen wegen der Wirkung der Kraft f, den Raum e. d u. d t zurück legen, weil f dieses Zeittheilchen über eben so wirkt, wie unsere Schwere (69. 68.). Diese beyden Räume aber verhalten sich wie g : f (65). Also ist g : f = d c : d u oder d u = $\frac{f d c}{g}$.

72. Zus. Weil c = $\frac{C}{T}$. t (33) wo die grossen Buchstaben unveränderliche Grössen bedeuten, so ist d c = $\frac{C}{T}$ d t also d u = $\frac{C}{T} \cdot \frac{f}{g}$ d t, oder wenn

g = 1

$g = 1$ gesetzt wird, verhält sich du wie fdt; daher man auch den Ausdruck $du = fdt$ gebrauchen kan (13).

73. Anm. Auf dieser nun gefundenen Gleichung beruht alles was sich von Wirkungen anderer Kräfte als unserer Schwere sagen lässt. Sie selbst aber beruht auf (65). Daher habe ich mich bemüht den dortigen Beweis so überzeugend als möglich darzustellen, oder, wenn ich nicht so glücklich gewesen seyn sollte, einen Beweis zu geben, der völligen Beyfall fände, doch deutlich anzuzeigen, worauf der Beweis ankommen muß, und was eigentlich dabey zu bedenken ist, welche Absicht die ganze Untersuchung von 56-65. hat. Die grössten Lehrer der Mechanik finden hier Schwierigkeiten. Herr Daniel Bernoulli hat den Ausdruck (72) unter die blos zufälligen Wahrheiten gerechnet und geglaubt, es könnte auch eben so gut $du = f^2 dt$ u. s. w. seyn (*). Daher hat sich Hr. Euler bemüht einen Beweis zu geben (**), damit aber Hr. D'Alembert nicht überzeugt (***). Der letztere, will die Gleichung (72) als eine Erklärung dessen, was man unter beschleunigender Kraft versteht annehmen. Dabey werden die Erinnerungen die ich 59. gemacht zu erwegen seyn. Sonst wäre dieses Verfahren so beschaffen, als wenn ich $ax = y^2$ für die Erklärung der Parabel annehmen, und was darauf folgt auf die Parabel anwenden wollte, die aus dem Kegel geschnitten wird, ohne gewiesen zu haben, daß diese Erklärung ihr zukömmt. Daß man aber beyde Betrachtungen des Drucks und der Bewegung hier vereinigen müsse, hat Hr. Euler sehr richtig erinnert (****). Wenn mir mein Verfahren

(*) Examen principiorum Mechanicae Sect. I. §. 1. Comm. Ac. Imp. Petropol. T. I. p. 127.

(**) Mechanica L. I. §. 146-152.

(***) Dynamique art. 19.

(****) l. c. §. 213.

gelungen ist, so wird es zugleich Cartesens Grundsatz der Mechanik (†) erläutert haben.

74. Zus. Der Raum der wegen Wirkung der Kraft f im Zeittheilchen dt zurückgelegt wird, ist $f.edcdt\,(70) = efdt.\frac{C}{T}dt\,(72)$ und verhält sich also wie fdt^2. Er ist ein unendlich kleines der zweyten Ordnung, weil er mit einer unendlich kleinen Geschwindigkeit, in unendlich kleiner Zeit zurückgelegt wird.

75. Zus. Der Geschwindigkeit u, gehöre die Höhe v (43; 34.) zu; so ist $u = \frac{Cr\,v}{r\,S}$ also $du = \frac{Cdv}{2r\,S.v}$ folglich (72) $\frac{C}{T}.\,fdt = \frac{Cdv}{2r\,Sv}$ oder $\frac{2r\,S}{T}\,fdt = \frac{dv}{r\,v}$.

76. Aufg. Die Differentialgleichung zwischen x und der Höhe welche der Geschwindigkeit zugehört zu finden.

Aufl. $dx = eudt\,(15) = \frac{2.S}{C.T}.\,\frac{C.r\,v}{r\,S}.\,dt$ $(34; 75) = \frac{2r\,Sv}{T}dt$; also in (75) $\frac{dv}{r\,v} = \frac{2r\,S}{T}$.

$f.\,\frac{T\,dx}{2r\,Sv}$ oder $dv = f\,dx$.

77. Anm.

(†) Mechanica in R. des Cartes Opusc. Posthumis (Amstelod. 1701. 4.).

77. Anm. Mit dieser Gleichung verbindet man $dx = \frac{2rS}{T} . r\,v.\,dt$, so hat man alles was von veränderten Bewegungen zu wissen verlangt wird, weil alles auf Geschwindigkeit, Raum, Zeit, und Vergleichung der treibenden Kraft mit der Schwere ankömmt. Diese letztere Vergleichung drückt man der Kürze wegen so aus: $dx = \frac{r\,v.}{m} dt$ wo $v_{in} = \frac{2rS}{T} = 250$ in den Zahlen (36) also $m = \frac{1}{2}\frac{1}{5}0$ daher $\frac{eC}{T}$ oder $\frac{2S}{T^2}$ (34) $= \frac{1}{2m^2}$ und der Raum (74) $= \frac{fdt^2}{2m^2} = \frac{1}{2}.250.250.fdt^2 = 31250.fdt^2$.

78. Zus. Ist f unveränderlich, so ist $v = fx$.

79. Zus. Wenn X der Raum ist den ein anderer Körper in den die unveränderliche Kraft F wirkt zurückgelegt hat, so gehört seiner Geschwindigkeit die Höhe F.X zu. Sollen also beyde Geschwindigkeiten (78; 77.) gleich seyn, so ist $X : x = f : F$; oder die Körper haben gleiche Geschwindigkeiten, wenn sich ihre Wege verkehrt wie die Kräfte verhalten. Die Körper brauchen nicht gleich zu seyn, wenn die Kräfte so wirken wie unsere Schwere (32).

80. Aufg. Wenn f unveränderlich ist die Zeit des Falles durch x zu finden.

Aufl. $dt = \frac{mdx^1}{r\,v}$ (77) $= \frac{mdx}{r\,fx}$ (78) also $t = 2\,m\,r\,\frac{x}{f}$ oder $= 1\frac{1}{2}\frac{1}{5}\,r\,\frac{x}{f}$ wenn x in Tausendtheilchen des rheinländischen Fusses gegeben ist.

81. Aufg. Bey einer unveränderlichen Kraft hat der Körper schon in L eine Geschwindigkeit die der Höhe c zugehört, man sucht seine Geschwindigkeit in Q.

Aufl. Hier muß $dv = f\,dx$ so integrirt werden, daß $v = c$ für $x = o$; Also ist $v = fx + c$.

82. Zus. $dt = \frac{m\,dx}{r\,(fx+c)}$ (77) also (nach Anal. des Unendl. 245. §.) $t = \frac{m}{f} \cdot 2.(fx+c)^{\frac{1}{2}}$ + Const; Und weil $x = o$ für $t = o$ so ist Const $= -\frac{2m}{f} r\,c$ also $t = \frac{2m}{f} \cdot [(fx+c)^{\frac{1}{2}} - c^{\frac{1}{2}}]$ wo $2m = 1\frac{1}{2}\frac{1}{5}$ wenn x und c wie 80 gegeben sind.

IIII. Cap.

Von veränderlichen Kräften.

83. Erkl. In der Linie APC 7 Fig. befindet sich ein Körper irgendwo in P; Er wird nach C mit einer gewissen Kraft getrieben, die durch des Punctes P Entfernung von dem gegebenen Puncte C, gegeben ist, so daß sich diese Kraft in P, zu der Kraft mit welcher er in A getrieben wurde, verhält, wie eine gewisse Function von CP zu der ähnlichen von CA. Alsdenn heisst C der **Mittelpunct der Kräfte** (centrum virium) und die Kraft, eine **Centralkraft.**

84. Zus.

84. Zus. Ohne zu untersuchen, wo diese Kraft herrührt, ist doch offenbahr, daß sie eben so wirkt, als ob C den Körper anzöge. Der Erfolg ist nähmlich einerley ob C ihn anzieht, oder ob was anders ihn nach C zu stösst; so wie wenn in C ein Magnet wäre, das Eisen in seiner Nachbarschaft auf einerley Art nach ihm zugehen würde, es möchte von ihm angezogen oder von irgend einer Materie angestossen werden. Ohne also etwas von dem Ursprunge einer solchen Kraft zu entscheiden, kann man sie hier, wo es nur auf Berechnung ihrer Wirkungen ankömmt, als eine anziehende betrachten, und das Gesetz nach dem sie sich ändert, das Gesetz der Anziehung nennen.

85. Zus. Es wird eine gewisse Entfernung f, geben, wo diese Kraft p, der Kraft unserer Schwere gleich ist. Ich meyne, wenn CE = f wäre, so wird ein Körper in E, daselbst erhalten zu werden, daß er sich nicht nach C senkt, eben die Gewalt erfodern, mit der man ihn bey uns wo unsere Schwere wirkt, erhalten müsste. Setzt man also unsere Schwere = 1; so ist in E, die veränderliche Grösse p = 1; Ich verstehe durch p, wie in 67 durch f, die beschleunigende Kraft.

86. Zus. Wenn ein Körper den eine solche veränderliche Kraft p treibt, den Weg AP = x 7 Fig. zurücke gelegt hat, und seine Geschwindigkeit in P der Höhe v zugehört; so ist aus 77; 78; $dv = p\,dx$ und $\frac{m\,dx}{r\,v} = dt$, p aber eine Function von

CP. Nun muß CA gegeben $= a$ seyn; so ist CP das ich y nennen will $= a - x$ und $dy = -dx$ und $dv = -p\,dy$ und $\frac{-m\,dy}{r\,v} = dt$.

87. Aufg. Die Kraft verhalte sich wie eine Potenz von CP, oder wie y^n wo n auch eine gebrochene oder verneinte Zahl seyn kann. Der Körper ruhe Anfangs in A, und werde von ihr in Bewegung gesetzt. Man sucht seine Geschwindigkeit in jeder Stelle P.

Aufl. Es ist also g oder $1 : p = f^n : y^n$ folglich $dv = \frac{-y^n}{f^n}\,dy$ (86) und $v = \text{Const} - \frac{y^{n+1}}{(n+1)f^n}$.

Nun soll $v = o$ für $y = a$ seyn. Also ist $o = \text{Const} - \frac{a^{n+1}}{(n+1)f^n}$ oder $v = \frac{a^{n+1} - y^{n+1}}{(n+1)f^n} = \frac{a^{n+1} - (a-x)^{n+1}}{(n+1)f^n}$.

88. Anm. Weil v wächst so muß dv bejaht seyn. Das zeigt auch die Differentialgleichung an; denn dy ist verneint und daher $-y^n\,dy$ bejaht, weil y bejaht ist. Eben das erhellt sogleich aus dem Ausdrucke $(a-x)^n\,dx$.

89. Zus. Wenn $n+1$ bejaht ist, so verschwindet y^{n+1} für $y = o$, und die Geschwindigkeit in C gehört der Höhe $\frac{a^{n+1}}{(n+1)f^n}$ zu. Ist aber $n+1$

ver:

verneint, so wird y^{n+1} für $y = o$ unendlich (Trigonometrie 4. Erkl. 4. Zus.) und die Geschwindigkeit in C gehört der Höhe $\frac{-o^{n+1}}{(n+1)f^n}$ welcher Ausdruck, unendlich, und wegen des verneinten Wehrtes von $n+1$, bejaht ist. Also ist da die Geschwindigkeit unendlich.

90. Zus. Für $n+1 = o$ oder $n = -1$ würde der Wehrt von v (87) unendlich zu werden scheinen, welches anzeigt, daß die Integration auf Logarithmen ankömmt (An. d. Un. 219.). Die Differentialgleichung wird nähmlich $dv = -\frac{fdy}{y}$ also $v =$ Const $- fly$ und $o =$ Const $- fla$ daher $v = fl\frac{a}{y}$, wo die Geschwindigkeit in C auch unendlich groß ist (An. d. U. 244.).

91. Zus. Fiele ein anderer Körper aus einer Stelle deren Weite von Mittelpuncte $= b$ wäre, wie voriger aus A; und wäre $n+1$ bejaht, so gehörte seine Geschwindigkeit in C, der Höhe $\frac{b^{n+1}}{(n+1)f^n}$. Also verhielten sich beyde Geschwindigkeiten wie $\sqrt{a^{n+1}} : \sqrt{b^{n+1}}$ oder sie wären (Arithm. VI. Cap.) in der $\frac{n+1}{2}$ mahl genommenen Verhältniß der Entfernungen des Anfangs des Falles vom Mittelpuncte.

92. Anm. Von dem Mittelpuncte sagt man daß er in der n fachen Verhältniß der Entfernungen, (in n plicata distantiarum) anziehe.

93. Zus. Man kann fragen, was der Körper machen wird, wenn er in C gekommen ist. Vermöge der Geschwindigkeit die er da hat, würde er ohne Zweifel fort über C hinaus nach Q zu gehen wollen. Wie ihn aber die Kraft bis nach C zu zoge, so zieht sie ihn wenn er über C hinaus will zurück, und wenn sie ihn aus C nach Q läßt, so vermindert sie also wenigstens seine Bewegung durch CQ, wie sie die durch PC beschleunigte. Man kann ihn ansehen als wollte er von C aus nach Q steigen und die anziehende Kraft wirkt also in ihn wie die Schwere in 45; nur mit veränderlicher Stärke.

94. Zus. Aber eben weil die Kraft hier veränderlich ist und selbst unendlich werden kann, ist die Entscheidung der Frage hier schwerer. Mir scheint die Sache nicht unentbehrlich genug in Anfangsgründen, daß ich mich dabey weitläuftig aufhalten sollte. Ich will nur eine Erinnerung dabey machen.

95. Zus. So richtig es sonst ist, daß Linien die aus einem Puncte nach entgegengesetzten Seiten gehen, als bejaht und verneint unterschieden werden, so wenig darf man doch hier $CQ = -y$ setzen. Denn wenn man solchergestalt die Kraft in Q durch $\frac{(-y)^n}{f^n}$ ausdrücken wollte, so würde dieser Ausdruck in dem Falle da n eine ungerade bejahte oder ver-

verneinte ganze Zahl wäre, einen verneinten Werth anzeigen; unter einer verneinten Kraft würde man ohne Zweifel das Gegentheil der bejahten, und also in Q eine fortstossende wie in P eine anziehende verstehen, da doch beydes anziehende seyn sollen. Wäre n ein Bruch dessen Nenner eine gerade Zahl wäre, z. E. $= \frac{1}{2}$ so zeigte dieser Ausdruck gar was unmögliches an, und doch ist offenbahr, daß eine Kraft, die sich wie die Quadratwurzel der Entfernung verhält, so gut in Q als in P anziehen kann. Für eine gerade ganze Zahl gäbe dieser Ausdruck die Kraft in Q mit der in P einerley. Da er aber in den andern Fällen offenbahre Unrichtigkeiten giebt, so hilft es nicht, daß er in diesem Falle von ungefähr was wahres giebt. Man muß nähmlich überlegen, daß die Linien CQ und CP hier in Absicht auf die Kraft nicht als entgegengesetzt betrachtet werden, weil die Kraft von allen Seiten her in gleiche Entfernungen gleich stark nach C wirkt. Die Kraft soll in Q eben so stark, und eben so nach C gerichtet seyn als in P, wenn $CQ = CP$. Also muß sie sich zu der Schwere verhalten, wie die Potenzen des Grades n von $+y$ und von f; denn so verhalten sich, die Kraft in P und die Schwere, nicht aber wie die Potenzen des Grades n von $-y$ und f.

96. Anm. Die hiebey befindliche Schwierigkeit wird man besser kennen lernen, wenn man Hrn. Eulers Mechanik I. Th. 269. 273. §. nachlesen will. Man s. auch Robins Remarks on Mr. Eulers Treatise of Motion &c. p. 10. wo die Erinnerungen gleichwohl mit mehr Härte als Einsicht abgefasst sind. Denn (p. 13.) daß die anziehende Kraft einen Körper nicht aus dem Mittelpuncte treiben könnte,

schickt sich gar nicht hieher, weil nur davon die Rede ist, ob er mit der Geschwindigkeit weiter fortgehen wird, mit welcher er da anlangt.

97. Aufg. In der Voraussetzung 87. die Zeit t, zu finden, in welcher AP zurückgelegt wird.

Aufl. Aus 86; 87. ist $dt = \frac{-mdy\, r\,(n+1) f^n}{r\,(a^{n+1} - y^{n+1})}$

Dieser Ausdruck lässt sich so allgemein nicht allgebraisch integriren, oder auf bekannte Quadraturen bringen (An. d. Un. 411. V.) man sucht also besondere Fälle wo es angeht.

98. Exempel. Wenn $n = 1$ oder die anziehende Kraft sich wie die Entfernung verhält.

So ist $\frac{dt}{m} = -\frac{dy\, r\, 2f}{r\,(a^2 - y^2)} = -r\, 2f \frac{dy : a}{r\,(1 - y^2 : a^2)}$

also (An. d. Un. 281. $r = 1$) $\frac{t}{m} = \text{Const} - r\, 2f.$ Bsin $(y : a)$ und weil $t = o$ für $y = a$; wo Bsin $1 = \frac{1}{2}\pi$ wenn $1 : \pi$ die Verhältniß des Durchmessers zum Umfange, und also 2π der Umfang für den Halbmesser 1 ist, so ist $o = \text{Const} - r\, 2f. \frac{1}{2}\pi$ also $t = m.$ $r\, 2f. \left(\frac{1}{2}\pi - \text{Bsin}\frac{y}{a}\right) = m\, r\, 2f.$ Bcos $\frac{y}{a}$.

99. Zus. Für die ganze Zeit durch AC, ist $y = o$ und sie wird $m. r\, 2f. \frac{1}{2}\pi$. In sie hat also die Grösse von AC keinen Einfluß, oder alle Körper, die in verschiedenen Entfernungen von C stille liegen, werden von dieser anziehenden Kraft in einer Zeit

an

an den Mittelpunct gebracht. Durch PC aber wird der Körper in der Zeit $m\sqrt{r}\,2f.\,\mathfrak{B}\sin\frac{y}{a}$ geführt.

100. Zus. Es wird nicht undienlich seyn, diese Rechnung durch ein besonderes Exempel zu erläutern. Man setze die anziehende Kraft sey in der Entfernung von 500. Fuß der Schwere gleich; so ist $f=500000$ (36) $\sqrt{r}\,2f=1000$ $m=\frac{1}{2}\frac{1}{5}\frac{1}{0}$ (77) und jeder stilliegender Körper wird in der Zeit von $\frac{1000.3,1415}{250.2}=2.3,1415=6,28$ Secunden an den Mittelpunct gebracht. Durch PC $=\frac{1}{2}a$ welches $\mathfrak{B}\sin\frac{y}{a}=30°=\frac{1}{6}\pi$ gibt, geht er in der Zeit von $\frac{1000.3,14159}{250.6}=2,09$ Secund.

101. Lehns. $\frac{\frac{1}{2}ady}{\sqrt{r}(ay-y^2)}$ zu integriren.

Aufl. Man setze $y=\frac{1}{2}a+z$ und ferner $\frac{1}{2}a=r$ so verwandelt sich das Differential in $\frac{rdz}{\sqrt{r}(r^2-z^2)}$ $=r.\frac{dz:r}{\sqrt{r}(1-z^2:r^2)}$ davon ist das Integral (An. d. Un. 281.) $r.\mathfrak{B}\sin\frac{z}{r}$, so genommen, daß es für $z=o$ verschwindet, da denn $\mathfrak{B}\sin\frac{z}{r}$ den kleinsten Bogen bedeutet der diesem Sinus zugehört.

102. Zus.

102. Zus. Sollte dieses Integral, für $y = a$ verschwinden, so müsste man gleich anfangs dasselbe $= r. \mathfrak{B} \sin \frac{z}{r} + \text{Const}$ setzen. Weil nun $z = \frac{1}{2} a = r$ für $y = a$ ist, so käme $o = r. \mathfrak{B} \sin 1 + \text{Const}$ oder (100) $\text{Const} = -\frac{1}{2} \pi r$ folglich das Integral $= r. (\mathfrak{B} \sin \frac{z}{r} - \frac{1}{2} \pi) = -r. \mathfrak{B} \cos \frac{z}{r}$.

103. II. Ex. Die Kraft verhalte sich verkehrt wie das Quadrat der Entfernung. (in reciproca duplicata distantiarum) so ist $n = -2$ und $\frac{dt}{m} = \frac{r(-1. f^{-2})}{r(a^{-1} - y^{-2})}. dy$. Was hier in dy multiplicirt wird, ist die Quadratwurzel aus $-\frac{1}{f^2} : \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{y}\right)$ das ist aus $\frac{1}{f^2} : \frac{a-y}{ay}$ oder aus $\frac{ay}{f^2.(a-y)}$ oder aus $\frac{ay^2}{f^2.(ay-y^2)}$ folglich ist das Differential zur rechten Hand $\frac{-ra}{f}. \frac{ydy}{r(ay-y^2)}$. Den unveränderlichen Factor beyseite gesetzt, so zerlegt man den veränderlichen folgender Gestalt: weil $d r(ay-y^2) = \frac{\frac{1}{2} a dy - y dy}{r(ay-y^2}$ so ist $\frac{ydy}{r(ay-y^2)} = \frac{\frac{1}{2} a dy}{r(ay-y^2)} - d r(ay-y^2)$; Also (102) $\int \frac{ydy}{r(ay-y^2)} = -r.$

$\mathfrak{B} \cos$

$\mathfrak{B}$ cof $\frac{z}{r} - r(ay - y^2)$; folglich $t = + \frac{m r^n a}{f}$.

$(\frac{1}{2}a . \mathfrak{B}\,\text{cof}\frac{y - \frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}a} + r(ay - y^2)$.

Für die Zeit durch AP; das Integral nähmlich ist so genommen, daß es für $y = a$ verschwindet und also da $= o$ ist wo die Zeit durch AP anfängt.

Für die Zeit durch AC ist also $y = o$ und diese Zeit$| = \frac{m r^n a}{f} . \frac{1}{2}a . \mathfrak{B}\,\text{cof} - 1 = \frac{m a r^n a}{2f} . \pi$.

104. III. Ex. Wenn die Kraft sich verkehrt wie der Würfel der Entfernung verhält, oder $n = -3$; ist $\frac{dt}{m} = \frac{-dy r - 2 f^{-3}}{r(a^{-2} - y^{-2})}$ nach gehöriger Rechnung $= \frac{a r^2}{f r f} . \frac{-y dy}{r(a^2 - y^2)}$ davon das Integral algebraisch ist, nähmlich $\frac{a r^2}{f r f} . r(a^2 - y^2)$ welches für $y = a$ verschwindet und also die Zeit durch AP giebt. Durch AC ist sie $\frac{a^2 r^2}{f r f}$. Andere Exempel wo die Zeit algebraisch wird giebt Euler Mech. I. 289. u. f.

105. Anm. Wie man bisher aus dem gegebenen Gesetze der Kraft die Bewegung bestimmt hat, so kann man umgekehrt aus dem Gesetze der Bewegung die Kraft finden. Wäre z. E. die Vergleichung der Geschwindigkeit mit dem Raume gegeben, so fände man die Kraft $p = \frac{dv}{dx}$ (76) So wenn sich die Geschwindigkeit wie der Raum verhielte

oder $\gamma v = \frac{x}{\gamma f}$ wäre, wo f eine bey solcher Gleichung erforderliche beständige Grösse, (wie e in 15) bedeutet so wäre $v = \frac{x^2}{f}$ und $p = \frac{2x}{t}$ also müsste sich die Kraft auch wie der zurückgelegte Raum verhalten. S. Eul. 326. u. f. §.

V. Cap.

Von dem Wiederstande.

106. Erkl. Ein Körper der durch eine flüssige Materie geht, muß Theile von ihr aus den Stellen treiben in die er gehen will. Hiezu muß er nothwendig Kraft anwenden; und daher geschiht in ihm das, was geschehen würde, wenn eine Kraft die nach entgegengesetzter Richtung wirkte seine Bewegung hinderte. Daher stellt man sich eine solche hindernde Kraft vor, die man den **Wiederstand** nennt.

107. Zus. Dieser rührt nur von der Trägheit her. Hätten die Theilchen der Materie einen gewissen geringen Zusammenhang wie Oel und andere zähe Feuchtigkeiten haben, so würde noch eine andere Kraft sie zu trennen, ihre Zähigkeit zu überwinden, erfodert. Diese Art von Wiederstande betrachte ich hier nicht. Wenn sich die Zähigkeit in eine vollkommene Festigkeit verwandelt, so wird aus diesem Wiederstande, der Wiederstand fester Körper, den Galiläus zuerst in der (44) angeführten Schrift zu betrachten angefangen hat.

108. Zus.

108. Zus. Der gegenwärtige Wiederstand (106) ist stärker wenn der Körper geschwinder geht, und also mehr Kraft anwenden muß, sich in eben der Zeit durch mehr Theile Platz zu machen. Daher sieht man ihn als eine relative Kraft (27) an, die eine Function von der Geschwindigkeit des Körpers wäre. Das Gesetz dieser Function, heisst **das Gesetz des Wiederstandes.** Verhielte sich z. E. der Wiederstand wie das Quadrat der Geschwindigkeit so hiesse man dieses Quadrat das Gesetz des Wiederstandes.

109. Zus. Man nehme an, für eine gewisse bekannte Geschwindigkeit sey der Wiederstand unserer Schwere gleich, oder, der Körper, der sich mit dieser Geschwindigkeit bewegt, empfinde so viel Hinderniß, als ob ihn unsere Schwere niederwärts druckte. Die Höhe, welche dieser Geschwindigkeit zugehört, heisse der **Exponent des Wiederstandes.** Alsdenn läßt sich die Stärke des Wiederstandes für jede andere Geschwindigkeit finden, wofern das Gesetz des Wiederstandes gegeben ist. Sie wird nähmlich sich zu der Schwere verhalten, wie sich ein paar ähnliche Functionen der beyden Höhen, der die der andern Geschwindigkeit zugehört, und des Exponentens, verhalten, z. E. wie derselben Quadrate (108.).

110. Zus. Wenn der Wiederstand für eine gewisse Geschwindigkeit, in einer gewissen Materie stärker ist als in einer andern, so muß es wohl daher rühren, daß einerley Körper, in der Zeit in

welcher er mit dieser Geschwindigkeit einen gewissen Raum zurücklegen wollte, sich in jener Materie durch mehr Theile Platz machen muß als in dieser (106), daß also jene dichter ist als diese. Wenn ein Körper einen Zoll weit in Queckſilber geht, so muß er vermuthlich da mehr Theilchen wegstossen, als wenn er eben so weit in Wasser ginge. Dieſes macht also begreiflich wie bey Materien von verſchiedener Dichte, einerley Geschwindigkeit verſchiedenen Wiederstand finden kann. Der Exponent des Wiederstandes wird diesen Unterschied anzeigen. Er wird in Queckſilber kleiner seyn als in Wasser, das heisst die Geschwindigkeit, die in Queckſilber eben so starken Wiederstand findet, als ob die Schwere entgegen wirkte, wird nicht so groß seyn als die welche eben den Widerstand im Wasser findet. Denn einerley Geschwindigkeit findet im Queckſilber grössern Wiederstand, also muß die, die eben so viel als im Wasser finden soll, kleiner seyn. Man wird leicht sehen, daß ich mich der Beyspiele von Queckſilber und Wasser nur bediene, diese Gedanken zu erklären, und mich in die Frage nicht einlasse, ob wirklich in gleichem Raume, Queckſilber mehr Materie als Wasser enthält, welches in der Naturlehre müsste ausgemacht werden. Wenigstens enthält es mehr Materie die sich uns durch Gewicht und Wiederstand empfindlich macht.

III Zuſ. Materien also die nach einerley Gesetze, z. E. beyde nach dem Quadrate der Geschwindigkeit wiederstehen und in so weit ähnlich heissen, unterscheiden sich doch durch den Wiederstand, den

sie

sie einerley Geschwindigkeit entgegen setzen, durch den Exponenten der Geschwindigkeit. Dieser Exponent ist also in jeder Materie nach ihrer Dichte anders, er wird sich selbst in einer Materie ändern, wenn sie nicht **gleichförmig** ist, d. i. wenn sich derselben Dichte ändert. So wiedersteht, bey einerley Geschwindigkeit, unsere Luft stärker, näher bey der Erde, wo sie dichter ist. Also wäre für den Fall eines Körpers in unserer Luft der Exponent veränderlich, und wäre also durch die Stelle, wo der Wiederstand ausgeübt wird, gegeben.

112. Zus. Soll eine wiederstehende Materie gegeben seyn, das ist, soll man wissen, wie stark sie wiedersteht, so müssen, das Gesetz und der Exponent des Wiederstandes gegeben seyn.

113. Aufg. Ein Körper bewegt sich in einer gegebenen wiederstehenden Materie in der Linie AP; 4 F. und hat in P die Geschwindigkeit welche der Höhe v zugehört. Man fragt wieviel er davon verlieren wird, indem er den Raum Pp = dx durchläuft.

Aufl. Der Exponent des Wiederstandes sey = q. Hätte der Körper, die ihm zugehörige Geschwindigkeit $\sqrt{q}$ (43) so litte er einen Wiederstand, der unserer Schwere = 1 (72) gleich wäre (109). Nun sey V die Function von $\sqrt{v}$, die das Gesetz des Wiederstandes ausdruckt, und Q die ähnliche von $\sqrt{q}$, so verhält sich der Wiederstand den die Geschwindigkeit $\sqrt{q}$ findet, zu dem welchen $\sqrt{v}$ findet, wie Q : V; (109) weil also jener = 1 so ist dieser = $\frac{V}{Q}$.

Das kann man also als eine Kraft ansehen, welche die Bewegung hindert (106), wie p (86) sie beschleunigte, also ist hier $dv = -\frac{V}{Q}dx$. Der Wiederstand im ganzen betrachtet, ist zwar eine relative Kraft (108). Aber der bestimmte Wiederstand, der einer gewissen Geschwindigkeit γ v zugehört, ist in diesem Augenblicke als eine absolute zu betrachten. Er hindert nähmlich die Bewegung diesen Augenblick über, eben so, wie eine absolute die ihm gleich wäre, sie hinderte.

114. Zus. Q ist entweder unveränderlich, oder durch die Stelle P, folglich durch x gegeben (111) und alsdenn eine Function von x; aber V eine von v. Daher sind in der Gleichung $\frac{dv}{V} = \frac{-dx}{Q}$ die veränderlichen Grössen allemahl von einander abgesondert (An. Un. 405.).

115. Anm. $\frac{V}{Q}$ bedeutet eine der Bewegung entgegengesetzte beschleunigende Kraft (49) die man also mit der Masse des Körpers multipliciren müsste, wenn man die aus ihr entspringende bewegende Kraft haben wollte. Damit man aber diese Untersuchung nicht ohne Noth verwickelter macht, so setze man die Masse unveränderlich, oder vergleiche nur den Wiederstand den einerley Körper in verschiedenen Materien leiden.

116. Aufg. In einer gleichförmigen Materie (111) die nach einer Potenz der Geschwindigkeit widersteht (in ratione multiplicata celeritatis) verlangt man die Bewegung eines Körpers zu bestimmen, den

ausser dem ersten Stosse, mit dem er in Bewegung gesetzt worden, sonst keine Kraft treibt.

Aufl. Seine Geschwindigkeit in A 4 F. gehöre der Höhe c zu. Auch sey $AP = x$. Der unveränderliche Exponent des Wiederstandes $= k$, und das Gesetz v^m der Wiederstand soll sich nähmlich wie die Potenz $2m$ der Geschwindigkeit verhalten. Also ist (113) $V = v^m$; $Q = k^m$ und $dv = -\frac{v^m dx}{k^m}$ oder $\frac{dv}{v^m} = -\frac{dx}{k^m}$ also $\frac{v^{1-m}}{1-m} = \text{Const} - \frac{x}{k^m}$. Für $x = o$ soll sich v in c verwandeln, also ist $\frac{c^{1-m}}{1-m} = \text{Const}$ und $v^{1-m} = c^{1-m} - \frac{(1-m)x}{k^m}$

Wenn $m < 1$ so lässt sich dieses so ausdrücken: $v = r(c^{1-m} - \frac{(1-m)x}{k^m})^{\frac{1}{1-m}}$. Für $m > 1$ ist $\frac{1}{v^{m-1}} = \frac{1}{c^{m-1}} + \frac{(m-1)x}{k^m}$ also $v = r\frac{k^m}{k^m + (m-1)c^{m-1}x}^{\frac{1}{m-1}}$. Für $m = 1$ ist die Differentialgleichung $\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{k}$ logarithmisch, (An. Un. 218) und $lv = \text{Const} - \frac{x}{k}$ also $lc =$

Const und $lv = lc - \frac{x}{k}$ oder $\frac{x}{k} = lc - lv = l\frac{c}{v}$.

Nun sey $le = 1$ (An. Un. 232.) so ist $\frac{x}{k} le = \frac{x}{k}$ und auch $= le^{\frac{x}{k}}$ also $le^{\frac{x}{k}} = l\frac{c}{v}$ folglich $e^{\frac{x}{k}} = \frac{c}{v}$ oder $v = c.\, e^{-\frac{x}{k}}$ So findet man also für jedes angenommene x die zugehörige Potenz von e, und berechnet daraus v.

117. Zus. Dieses letzt gefundene gilt also wenn sich der Wiederstand wie das Quadrat der Geschwindigkeit verhält. Da verschwindet nun die Geschwindigkeit nicht eher bis x unendlich wird, oder der Körper geht unendlich weit fort, ehe seine Bewegung durch den Wiederstand vernichtet wird.

118. Zus. Wenn $m > 1$ oder die Materie stärker als nach dem Quadrate der Geschwindigkeit wiedersteht, so verschwindet v auch nicht eher, als bis x unendlich wird, und ist sonst überall endlich, auch wenn c unendlich wäre, denn da käme $v = \sqrt[m-1]{\frac{k^m}{(m-1)x}}$ Gegentheils wäre für ein unendliches c bey $m = 2$ auch v unendlich. Das heisst: Ein Wiederstand der dem Quadrate der Geschwindigkeit gemäß wäre, liesse einem Körper der sich mit unendlicher Geschwindigkeit zu bewegen anfinge, immer noch unendlich viel, aber ein stärkerer Wiederstand

derstand verminderte diese anfängliche Geschwindigkeit, auf eine endliche.

119. Zus. Wenn der Körper zuvor schon ehe er mit einer endlichen Geschwindigkeit in A angelangt war, sich (117) in eben der Materie bewegt hat, so muß er irgendwo eine unendliche gehabt haben. Die Stelle zu finden, setze man den Nenner von v nähmlich $k^m + (m-1)\, c^{m-1}$ $x = o$ dieses gibt $x = -\frac{k^m}{(m-1).\, c^{m-1}}$ verneint, weil sie so weit über A hinaufliegt.

120. Zus. Für $m < 1$ verschwindet die Geschwindigkeit wo $x = \frac{c^{1-m}\, k^m}{1-m}$. So tief unter A geht also der Körper, und bleibt da ruhig liegen.

121. Zus. Für $m = o$ wäre der Widerstand unveränderlich und der Schwere gleich. Auch $v = c - x$ der Körper ginge nähmlich mit der gleichförmig verminderten Bewegung in (45).

122. Zus. Wenn der Widerstand sich wie die Geschwindigkeit verhält, also $m = \frac{1}{2}$ so ist $v^{\frac{1}{2}} = c^{\frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{2}x}{k^{\frac{1}{2}}}$ oder $\frac{x}{2rk} = rc - rv$; was rechter Hand steht, ist die Geschwindigkeit die verlohren worden ist, indem der Raum x ist beschrieben worden, und sich also wie dieser Raum verhält. Newt. Princ. L. I. Pr. 2.

123. Aufg. Bey (116.) die Zeit t zu bestimmen.

Aufl. Für $m > 1$ ist (das m von (86) jetzo beyseit gesetzt)

$$dt = \frac{(k^m + (m-1).c^{m-1}.x)^{\frac{1}{2m-2}}}{r(c.k^{m:(m-1)})} . dx$$

$$= \frac{(k^m + (m-1).c^{m-1}.x)^{\frac{1}{2m-2}} .(m-1).c^{m-1} dx}{(m-1).c^{m-1}.r(c.k^{m:(m-1)})}$$

Der Zähler mit An. Un. 245. verglichen, ist

dorten	c	a	X	p	p+1
hier	1	k^m	$(m-1).c^{m-1}.x$	$\frac{1}{2m-2}$	$\frac{2m-1}{2m-2}$

$$\text{also } t = \frac{2m-2.(k^m + (m-1).c^{m-1}x)^{(2m-1):(2m-2)}}{(2m-1).(m-1).c^{m-1}.r(c.k^{m:(m-1)})} + \text{Const}$$

Nun ist $t = o$ für $x = o$ also

$$o = \frac{2.k^{m.(2m-1):(2m-2)}}{(2m-1).c^{m-1}.r(c.k^{m:(m-1)})} + \text{Const und}$$

$$t = \frac{2.(k^m + (m-1).c^{m-1}x)^{\frac{2m-1}{2m-2}} - 2k^{(2m^2-m):(2m-2)}}{(2m-1).c^{m-1}.r(ck^{m:(m-1)})}$$

Eben

Eben das kann auch gebraucht werden wenn $m < 1$ weil man die Verkehrungen 115. nur machte, daß überall bejahte Exponenten kamen.

Für $m = 1$ ist $dt = \frac{dx.e^{x:2k}}{rc}$. Den Zähler zu integriren ist in An. Un. 242.

dorten	ε	m
hier	o	$\frac{1}{2k}$

also $t = \frac{2ke^{x:2k}}{rc} + \text{Const}$; und $o = \frac{2k}{rc} + \text{Const}$

also $t = \frac{2k.(e^{x:2k} - 1)}{rc}$.

Wenn man in diesem Werthe der Zeit, die Längen in Tausendtheilchen des Rheinl. Fusses ausdruckt, und alsdenn was herauskömmt mit 250 dividirt oder mit 0,004. multiplicirt, so hat man die Zeit in Secunden (77).

124. Zus. Weil $e > 1$ (An. Un. 232.) so ist eine Potenz davon, deren Exponent unendlich ist, auch unendlich, und folglich wird für $m = 2$, der unendliche Raum, in welchem der Körper seine Geschwindigkeit völlig verliert (116) in unendlicher Zeit beschrieben. Eben so verhält es sich auch wenn $m > 1$ da allemahl $2m > 1$. In diesem Falle findet sich die Zeit in welcher die unendliche Geschwindigkeit die der Körper ehe er in A anlangte irgendwo hätte,

auf die endliche in A ist vermindert worden (118) aus dem ihr zugehörigen dort gefundenen Werthe von x; Sie ist also $\frac{-2k^m}{(2m-1).c^{\frac{2m-1}{2}}}$, verneint, weil sie vor der Ankunft in A verfliesst. Ist $m < 1$ so wird man den gefundenen Ausdruck der Zeit so zu ordnen, daß der veränderlichen Grösse Potenz allemahl einen bejahten Exponenten hat, zweene Fälle, $2m > 1$ und $2m < 1$ unterscheiden müssen; wie man eben deßwegen in 116. die Fälle $m > 1$ und $m < 1$ unterschieden hat. So wird man nach gehöriger Anordnung dieses Ausdrucks finden, daß für $2m > 1$, der endliche Raum in welchem die Geschwindigkeit vernichtet wurde (119) in unendlicher Zeit, aber für $2m < 1$ in endlicher beschrieben wurde.

125. Zus. Für $2m = 1$ muß man die Zeit unmittelbar aus der Differentialgleichung suchen. Nähmlich (121) $dt = \frac{2r\,k\,dx}{2r(ck)-x}$ also (An. Un. 218) $t = 2r\,k\,l\frac{\text{Const}}{2r(ck)-x}$ und $o = 2r\,k\,l\frac{\text{Const}}{2r(ck)}$ Also $\text{Const} = 2r(ck)$; und $t = 2r\,k.l\frac{2r(ck)}{2r(ck)-x}$ welches für den Raum in welchen hier die Geschwindigkeit vernichtet würde (119) auch unendlich wird.

125. Zus.

125. Zus. Der Körper verlieret seine Geschwindigkeit erst in unendlicher Zeit, das ist nie, wenn m nicht kleiner als $\frac{1}{2}$ ist (124. 123.).

126. Aufg. Der Körper wird während seiner Bewegung von einer absoluten Kraft p getrieben, man sucht dv.

Aufl. I) $dv = p\,dx - \frac{V}{Q}dx$ wenn die Kraft seine Bewegung beschleunigt; oder II) $dv = -p\,dx - \frac{V}{Q}dx$ wenn auch sie seine Bewegung hindert.

127. Zus. Man sieht p wenn sie nicht unveränderlich ist, als eine Function von x an. Denn die Stärke dieser Kraft wird, wo sie sich ändert, sich nach der Stelle ändern, wie in 83. Weil nun V eine Function von v ist (113), so sind in der Differentialgleichung (126) die veränderlichen Grössen vermengt (An. Un. 405.) und in der größten Allgemeinheit hat man keine Methode sie von einander zu sondern. Drey Fälle wo dieses angeht fallen in die Augen.

128. I. Fall. Wenn p und q (113) beyde unveränderlich sind; da ist auch Q unveränderlich und $\frac{dv}{pQ-V} = dx$ wo auf der linken Seite alles Veränderliche durch v gegeben ist. Dieses findet statt, wenn ein Körper, den eine unveränderliche Kraft treibt, in einer Materie die durchaus einerley Dich-

te hat, z. E. ein Stein in Wasser, sinkt. Wäre p, Q eine unveränderliche Grösse $= A$ also $p = \frac{A}{Q}$ so hätte man auch die veränderlichen Grössen von einander gesondert und $\frac{dv}{A - V} = dx$.

129. II. Fall. $V = v$; also auch $Q = q$; und $dv = p\,dx - \frac{v}{q}\,dx$; wo q eine Function von x ist

(114). Man vergleiche dieses mit $a\,dy = b\,y^n p\,dx + y\,p\,dx$ An. Un. 412; (wo in der ersten Zeile der 356. Seite; $a\,dy$ statt des Druckfehlers $a\,dx$ stehen muß) so ist

dorten	a	y	b	q	n	p	z
hier	1	v	1	p	o	$-\frac{1}{q}$	$e^{-\int \frac{dx}{q}}$

Die dortige Integralgleichung O wird also hier

$$\text{Const} \frac{-z^{-1}}{-v^{-1}} = \int z.^{-1} \cdot p\,dx \text{ oder } \text{Const} + \frac{v}{z} = \int \frac{p\,dx}{z}$$

wo statt z der nur angezeigte Werth zu setzen ist. Welches $\text{Const} + v.\, e^{\int (dx : q)} = \int e^{\int (dx : q)} .\, p\,dx$ giebt, wo alles wenigstens auf Quadraturen gebracht ist (An. Un. 406.).

130. III. Fall. Man versuche ob sich $(p - \frac{V}{Q})\,dx - dv = o$ auf eine gleichartige rationale Gleichung bringen lässt, mit der man nach An. Un. 413.

413. verfahren könnte. Soll nun dieses geschehen, so müssen sich V wie eine Potenz von v; q und p wie Potenzen von x verhalten. Denn wäre z. E. V nicht wie eine einzige Potenz von v, sondern wie die Summe von etlichen; so müssten dieser Potenzen Exponenten unterschieden seyn, und so bestünde V dx aus verschiedenen veränderlichen Theilen, da in dem einen die veränderlichen Grössen zusammen nicht die Abmessung wie in dem andern ausmachen könnten. Dieses voraus erinnert, setze man $q = B x^{\beta}$ wo B eine Potenz des Exponenten $\beta - 1$ von einer unveränderlichen Linie bedeutet, damit q eine Linie wird, die sich wie die Potenz β der Linie x verhält, z. E. wenn $B = g^{\beta - 1}$ so wäre $q = \frac{x\beta}{g\beta - 1}$. Ferner ist p eine Zahl (67) und zugleich eine Function von x (126) also, weil es eine Potenz seyn soll $p = C x^{\gamma}$ so, daß C einer unveränderlichen Linie Potenz vom Exponenten $-\gamma$ bedeutet. Nun soll $\frac{V}{Q}$ auch eine Zahl seyn (113) und weil die Functionen sich nur wie einzelne Potenzen verhalten sollen, so muß sich V:Q verhalten wie eine gewisse Potenz von r v, zu eben der von r q (113). Also setze man $V:Q = v^{\alpha}:q^{\alpha} = v^{\alpha}:B^{\alpha} x^{\alpha\beta}$. Solchergestalt wird die Gleichung des Anfangs von gegenwärtigen Absatze;

$$\left(C x^{r} - \frac{v^{\alpha}}{B^{\alpha} x^{\alpha\beta}} \right) . dx - dv = o \text{ oder}$$

(C.

$(C.B.^{\alpha}x^{\alpha\beta+\gamma-v^{\alpha}})\,dx - B^{\alpha}x^{\beta\alpha}dv = o.$

Die vergleicht sich nun mit der An. Un. 418. folgender Gestalt. Es ist

dorten	x	y	a	n	m	b	q	p	c	r	s
hier	x	v	$C.B^{\alpha}$	o	$\alpha\beta+\gamma$	−1	α	o	$-B^{\alpha}$	$\beta\alpha$	o

Die dortige Vergleichung zwischen den Exponenten heisst also hier so:

$(o-\alpha+1).(o-\alpha\beta-\gamma) = (o-\beta\alpha+1).(o-\alpha)$

oder $(\alpha-1).(\alpha\beta+\gamma) = (\alpha\beta-1).\alpha$ welches $(\alpha-1).\gamma = (\beta-1)\alpha$ giebt. Soll sich also gegenwärtige Gleichung gleichartig machen lassen, so muß

$$\alpha - 1 : \alpha = \beta - 1 : \gamma$$ seyn.

Für eine gleichförmige Materie (111) ist q unveränderlich, also $\beta = o$ und $\gamma = \frac{\alpha}{1-\alpha}$. Soll also die Gleichung hier gleichartig werden, so muß sich p wie die Potenz $\frac{\alpha}{1-\alpha}$ verhalten wenn sich der Wiederstand wie die Potenz α von v verhält.

131. Aufg. In einer gleichförmigen Materie, wo sich der Wiederstand wie das Quadrat der Geschwindigkeit verhält, wird ein Körper von einer unveränderlichen Kraft $= g$ getrieben, man sucht seine Geschwindigkeit.

Aufl. Hier ist q (113) unveränderlich, es sey $\frac{V}{Q} = k$; so ist $\frac{V}{Q} = \frac{v}{k}$; $p = g$; und (126) $dv = (g - \frac{v}{k})\,dx$. Also in An. Un. 422. (wie 119).

dorten

dorten	v	x	a	b	n	q	p	z
hier	y	x	1	g	o	1	$\frac{-1}{k}$	e

$-x:k$

Die dortige p und q nähmlich, die Functionen von x bedeuten, können auch beständige Grössen werden; weil man sie als beständige Grössen in x^o multiplicirt ansehen kann.

So wird die dortige Gleichung O, hier

$$\text{Const} \frac{-e^{+x:k}}{-1.v^{-1}} = g.\int e^{x:k}.dx.$$

Den Theil rechter Hand integrirt man aus An. Un. 242. es ist nähmlich

dorten	ε	m
hier	o	1:k

also das Integral $k e^{x:k}$. Folglich Const + $(v-gk).e^{x:k} = o$. Es sey die Geschwindigkeit r c für x:o so ist Const $+v-gk=o$ da man denn $v=gk+(c-gk).e^{-x:k}$ findet.

132. Zus. Wenn die Geschwindigkeit im Anfange $=o$ ist, so ist $v=gk.(1-e^{-x:k})$. Wenn x wächst, so ist das Differential von $e^{-x:k}$ verneint, (weil in An. Un. 241; das dortige m hier $=-1:k$) also nimmt $e^{-x:k}$ ab, wenn x wächst. Nun ist es $=1$ für $x=o$ folglich für jedes bejahte x, kleiner als 1, wie auch seyn muß wenn v bejaht und die Geschwindigkeit möglich seyn soll. Wenn also x wächst, nimmt das was rechter Hand

von

von 1 abgezogen wird ab, und die bejahte Grösse v wächst; Also nimmt die Geschwindigkeit immer zu, wird aber doch nicht unendlich, weil für $x = \infty$, $e^{-x:k}$ verschwindet (man sehe 124.) und $v = gk$ wird. Also nähert sich die wachsende Geschwindigkeit immer der Gränze γgk.

133. Zus. Finge der Körper in 131. seine Bewegung mit der Geschwindigkeit γgk an, so würde seine Bewegung gleichförmig, es wäre nähmlich in 131; $v = gk$. Dieß erhellet auch wenn man $v = gk$ in der Differentialgleichung $dv = (g - \frac{v}{k}).dx$ setzt, denn da ist allemahl $dv = o$.

134. Zus. Wenn $c < gk$, so ist in 131; allemahl $v < gk$ so lange x endlich ist. Gleichwohl wächst v immer, denn weil $e^{-x:k}$ abnimmt, (132) so wird von gk immer weniger und weniger abgezogen, und so nähert sich v eben der Gränze gk die es erst für $x = \infty$ erreichte.

135. Zus. Wenn $c > gk$ so ist in 131. allemahl $v > gk$ würde aber $= gk$ für $x = o$. Da es sich also dieser Gränze nähern muß, und zuvor grösser ist, so wird des Körpers Bewegung hier vermindert.

136. Anm. Wenn der Wiederstand verschwände, oder der Körper in einem leeren Raume ginge, so müsste $k = \infty$ seyn, damit $\frac{v}{k}$ verschwände. So würde sich die Differentialgleichung 131. in $dv = g\,dx$ wie in 76. verwandeln. Den Ausdruck von v, den man am Ende von 131. fand,

würde

würde man hier folgendergestalt brauchen. In An. Un. 239. setze man statt des dortigen x hier $-\frac{x}{k}$, so hat man für jeden Werth von k.

$$e^{-x:k} = 1 - \frac{x}{k} + \frac{x^2}{2k^2} - \frac{x^3}{6k^3} \cdots$$

Folglich $c - gk$ mit dieser Reihe multiplicirt, und was sich aufhebt weggelassen.

$$v = c - \frac{cx}{k} + \frac{cx^2}{2k^2} - \frac{cx^3}{6k^3} \cdots$$

$$+ gx - \frac{gx^2}{2k} + \frac{gx^3}{6k^2} - \frac{gx^4}{24k^3} \cdots$$

Für $k = \infty$ bleibt nur $c + gx$ wie in 81.

137. Anm. Wenn ein sehr dichter Körper sich in einer sehr dünnen Materie bewegt, wird k sehr groß seyn (110) und da findet man v ziemlich genau durch die ersten Glieder der Reihe (136).

138. Aufg. In 131. die Zeit zu finden.

Aufl. $dt = \frac{dx}{r(gk + (c - gk).e^{-x:k})}$ (86; 131; wegen des m von 86. das man wegläßt s. 123. am Ende). Dieses zu integriren setze man $e^{-x:k} = z$, davon man das Differential vermittelst An. Un. 241. findet, und $c - gk = b$ so wird $dt = \frac{-k\,dz}{zr(gk + bz)}$. Noch sey $gk + bz = r^2$ oder $z = \frac{r^2 - gk}{b}$ so wird $dt = \frac{-2k\,dr}{r^2 - gk}$. Was in dr multiplicirt ist, hat zum Nenner $(r + r\sqrt{gk}).(r - r\sqrt{gk})$

und läßt sich also nach An. Un. 361. zerlegen. Es ist nähmlich

dorten	M	N	p−qz	S	$\frac{p}{q}$
hier	−2k	r^2-gk	$rgk+r$	$-rgk+r$	$-rgk$

$$\text{also } A=\frac{-2k}{-rgk-rgk}=+r\frac{k}{g}.$$

Ferner, wenn das dortige M, N, hier noch eben die Bedeutungen behalten, aber der andere Bruch gesucht wird

dorten	p−qz	S	$\frac{p}{q}$
hier	$-rgk+r$	$rgk+r$	$+rgk$

$$\text{also } A=\frac{-2k}{rgk+rgk}=-r\frac{k}{g}.$$

$$\text{Folglich } dt=\frac{r\frac{k}{g}}{r+rgk}dr-\frac{r\frac{k}{g}}{r-rgk}.dr \text{ und}$$

$$\text{(An. Un. 218.) } t=r\frac{k}{g}.l\frac{r+rgk}{r-rgk}+\text{Const}$$

Nun ist $t=o$ für $x=o$, oder $z=1$ oder $r=r$ $(gk+b)=rc$; also $o=r\frac{k}{g}.l\frac{rc+rgk}{rc-rgk}$

$$+\text{Const und } t=r\frac{k}{g}.\left(l\frac{r+rgk}{r-rgk}-l\frac{rc+rgk}{rc-rgk}\right)$$

Nun ist $\frac{r+rgk}{r-rgk}$ wenn man mit dem Zähler oben

oben und unten multiplicirt $\frac{(r+\gamma gk)^2}{r^2-gk}$ =

$\frac{(r+\gamma gk)^2}{bz}$ und eben so $\frac{\gamma c+\gamma gk}{\gamma c-\gamma gk}=\frac{(\gamma c+\gamma gk)^2}{c-gk}$

Folglich

$$t=\gamma\frac{g}{k}.\left(2l(r+\gamma gk)-lbz-2l(\gamma c+\gamma gk)+l(c-gk)\right)$$

$$=\gamma\frac{k}{g}.\left(2l\frac{r+\gamma gk}{\gamma c+\gamma gk}+l\frac{1}{z}\right)$$ weil $c-gk=b$

Aber $lz^{-1}=\frac{x}{k}$; also die Werthe von r, z, und b wieder hergestellt.

$$t=\frac{x}{\gamma gk}+2\gamma\frac{k}{g}l\frac{\gamma(e^{-x:k}.(c-gk)+gk)+\gamma gk}{\gamma c+\gamma gk}$$

womit man wie in 123. verfährt die Zeit in Secunden zu finden.

139. Zus. Für $c=o$ ist das was hinter den Zeichen des Logarithmen steht $\frac{\gamma gk.(1-e^{-x:k})+\gamma gk}{\gamma gk}$

$$=\gamma(1-e^{x:k})+1=\frac{\gamma(e^{x:k}-1)+e^{x:2k}}{e^{x:2k}}$$

Der Logarithme hievon ist

$$l(\gamma(e^{x:k}-1)+e^{x:2k})-\frac{x}{2k}$$

Folglich wird für diesen Fall

$$t = 2r\frac{k}{g}\,l(r(e^{x:k}-1)+e^{x:2k})$$

140. Zus. Hier läßt sich aus der gegebenen Zeit der Weg x finden. Denn t bedeutet die Menge von Secunden, durch welche die Zeit auszudrücken ist,

$$\text{so ist } t = {}_{1}{}^{1}{}_{2}{}^{1}{}_{5}\cdot r\frac{k}{g}\cdot l(r(e^{x:k}-1)+e^{x:2k})$$

$$\text{oder } 125\,t\,r\frac{g}{k} = l\,(r(e^{x:k}-1)+e^{x:2k})$$

Weil nun was linker Hand steht mit $le = 1$ multiplicirt, den Logarithmen einer Potenz von e giebt, die eben dieses, was mit le multiplicirt wird, zum Exponenten hatte, so hat man auf beyden Seiten Logarithmen und dieselben weggelassen,

$$e^{125\,t\,r\frac{g}{k}} = r\,(e^{x:k}-1)+e^{x:2k}$$

Man nenne was linker Hand steht n; daß $n - e^{x:2k} = r\,(e^{x:k}-1)$; wenn man auf beyden Seiten quadrirt, findet sich endlich $e^{x:2k} = \frac{n^2+1}{2n}$ also $\frac{x}{2k} = l\frac{n^2+1}{2n}$ und $x = 2k.(l\frac{n^2+1}{2} - ln)$. Aber $ln = 125\,t\,r\frac{g}{k}$; also $x = 2kl\frac{n^2+1}{2} - 250\,t\,r\,gk$. Ist so k in Tausendtheilchen des rheinl. Fusses, t in Secunden gegeben,

und

und wird der natürliche Logarithme von $\frac{n^2+1}{2}$ gebraucht, so findet man x in Tausendtheilchen des rheinl. Fusses.

141. Zus. Für ein grosses k (137) fände man in (139) die Zeit folgendergestalt beynahe, durch eine Reihe wo man x:k für klein annähme. Man drücke erstlich $r(e^{x:k}-1)$ durch eine Reihe aus, die sich für ein kleines $\frac{x}{k}$, nähert. Dieses geschicht folgendergestalt:

Es sey $r\frac{x}{k}=w$; so ist (An. Un. 239.) statt des dortigen x hier $\frac{x}{k}=w^2$ gesetzt

$$e^{x:k}-1=w^2.(1+\tfrac{w^3}{2}+\tfrac{w^4}{4}+\tfrac{w^6}{24}+\tfrac{w^8}{120}\ldots)$$
$$=w^2.S \text{ also die gesuchte Wurzel } =w.rS.$$

Man suche also $rS=1+y$ An. endl. Gr. 625. wo $y=\frac{w^2}{2}+\frac{w^4}{6}+\frac{w^6}{24}+\frac{w^8}{120}\ldots$ also die Potenzen dieser Reihe erst gehörig berechnet

$$1-\tfrac{1}{2}y=1+\tfrac{1}{4}.w^2+\tfrac{1}{12}w^4+\tfrac{1}{48}w^6+\tfrac{1}{240}w^8$$
$$-\tfrac{1}{8}y^2= \quad -\tfrac{1}{32} \quad -\tfrac{1}{48} \quad -\frac{5}{72.8}$$
$$+\tfrac{1}{16}y^3= \quad +\frac{1}{16.8} \quad +\frac{1}{16.8}$$
$$-\tfrac{5}{128}y^4= \quad -\frac{5}{128.16}$$

Wenn man die Brüche gehörig zusammen rechnet so findet man $rS=+\frac{1}{4}w^2+\frac{5}{96}w^4+\frac{1}{128}w^6+\frac{79}{3.8.5.48}w^8$

also

$$r(e^{x:k}-1) = w + \tfrac{1}{4}w^3 + \tfrac{5}{96}w^5 + \tfrac{17}{2880}w^7 + \frac{79}{3.8.5.48}w^9$$

$$e^{x:k} = 1 + \tfrac{w^2}{2} + \tfrac{w^4}{8} + \tfrac{w^6}{48} + \frac{w^8}{24.16}$$

die letzte Reihe aus An. Un. 239. statt des dortigen x hier $x:2k$ oder $\frac{1}{2}w^2$ gesetzt.

Beyde Reihen zusammen nun, machen eine aus, deren Logarithmen man nehmen soll.

In der Formel also für $l(1+u)$ An. Un. 220. setze man u dem veränderlichem Theile der aus beyden einzelnen zusammengesetzten Reihe gleich, so ist

$u =$	w	$+\frac{1}{2}w^2$	$+\frac{1}{4}w^3$	$+\frac{1}{8}w^4$	$+\frac{5}{96}w^5$
$-\frac{1}{2}u^3 =$		$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{4}$
$+\frac{1}{3}u^3 =$			$+\frac{1}{3}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{4}u^4 =$				$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$
$+\frac{1}{5}u^5 =$					$+\frac{1}{5}$
der Logar. $=$	w	$+\frac{1}{12}w^3$		$+\frac{1}{480}w^5$	

Ich zeige hier nur wie die Rechnung muß gemacht werden, und stelle deßwegen ihren Anfang vor. Nimmt man in der Reihe für u mehr Glieder, z. E. die ersten 9, da man auf die 9 Potenz von w kömmt, und so weit habe ich die Reihe vorhin angegeben, so kann man in dem Logarithmen auch bis auf diese Potenz von w gehen, zu welcher Absicht man von den Reihen, die die Potenzen von u ausdrücken, alle Glieder berechnen muß, in denen die 9 Potenz von w, oder eine niedrigere befindlich ist.

Die-

Dieser Logarithme nun, so weit als man ihn berechnet hat, mit $2r\frac{k}{g}$ multiplicirt giebt t. Wenn man den Logarithmen bis auf die 9 Potenz von w berechnet hat, und alsdenn statt w seinen Werth wieder herstellt, so findet man nach Eulers Rechnung Mech. L. I. 453.

$$t = r\frac{x}{g}\cdot\left(2 + \frac{x}{6k} + \frac{x^2}{240k^2} - \frac{x^3}{1344k^3} - \frac{x^4}{46080k^4} ..\right)$$

Welches für ein unendliches k, (136) die Zeit wie in 80 giebt, wenn man noch mit m (77) multiplicirt.

142. Aufg. In einer Materie wie (131) wird ein Körper in C 7 Fig. mit der Geschwindigkeit die der Höhe c zugehört aufwärts nach A geworfen. Die unveränderliche Kraft g wirkt ihm beständig entgegen, (wie wenn ein schwerer Körper der Richtung der Schwere entgegen, in einer solchen wiederstehenden Materie aufwärts geworfen würde). Man sucht die Geschwindigkeit in jeder Stelle P; wenn $CP = x$.

Aufl. Hier ist $dv = -\left(g + \frac{v}{k}\right)dx$. Es ändert sich nähmlich in 131. blos die Wirkung der Kraft g, welche dorten beschleunigte, hier die Bewegung hindert, daß also die Veränderung von v die von ihr herrührt, $-g\,dx$ eben so ist wie die ähnliche

liche Veränderung in 131; $+gdx$ war, die Kraft thut nähmlich hier eben so was wie die Schwere in 45. Man könnte nun diese Differentialgleichung wie in 131. integriren. Es ist aber nicht nöthig diese Arbeit von vornen anzufangen. Denn da hier und dorten, g nur entgegengesetzte Zeichen hat, sonst alles einerley ist, so darf man nur in der dortigen Integrale $-g$ statt $+g$ schreiben. Also wird für die jetzige Untersuchung $v = e^{-x:k}.(c+gk) - gk$.

143. Zus. Wenn der Körper bis an A steigt, also daselbst die Geschwindigkeit verschwindet, so ist $o = e^{-x:k}.(c+gk) - gk$ oder $\frac{gk}{c+gk} = e^{-x:k}$

das ist $l\frac{gk}{c+gk} = -\frac{x}{k}$ oder $x = kl\frac{c+gk}{gk} = CA$

144. Zus. Für eine dünne Materie, (137) und ein x das in Vergleichung mit k nicht allzugroß ist, findet man v beynahe so daß man die Potenz von e nach 136. in eine Reihe entwickelt. Da ist

denn $v = e-(\frac{c}{k}+g).(x-\frac{x^2}{2k}+\frac{x^3}{6k^2}\ldots)$

145. Anm. In 47. war das Steigen durch KL den Fallen durch LK ähnlich. Dieses kann hier nicht seyn, weil beym Steigen, beyde Kräfte, g und der Wiederstand hindern, beym Fallen jene beschleunigt. Wenn die Materie, beym Fallen, an statt zu wiederstehen fortstiesse, so würde ein Fall in ihr dem Steigen in der wiederstehenden Materie ähnlich seyn.

146. Aufg. In 142. die Zeit zu finden.

Aufl. Nach der 142. gemachten Erinnerung dürfte man in dem Werthe von t, welcher 138. am Ende gefunden worden, nur $-g$ statt $+g$ setzen. Aber da kämen unmögliche Grössen in den Ausdruck. Nun weiß man aus An. Un. 324. daß solche Logarithmen Kreisbogen bedeuten. Man wird also die Differentialgleichung für die Zeit durch Kreisbogen integriren. Wie nähmlich in 138; $dt = -\frac{2kdr}{r^2 - gk}$ war, so wird hier $dt = -\frac{2kdr}{r^2 + gk}$, und $b = c + gk$; $r^2 = (c + gk).\, e^{-x:k} - gk$ seyn.

Also ist $dt = -\frac{2k}{r\,gk} \cdot \frac{dr : r\,gk}{1 + \frac{r^2}{gk}}$ folglich (An. Un. 299).

$t = \text{Const} - 2r\frac{k}{g}.\,\mathfrak{B}\,\text{tang}\,\frac{r}{r\,gk}$. Und weil $t = o$ für $x = o$ oder $r^2 = c$, so ist

$t = 2r\frac{k}{g}.(\mathfrak{B}\,\text{tang}\,r\frac{c}{gk} - \mathfrak{B}\,\text{tang}\,\frac{r}{r\,gk})$

Man setze in Trigon. 19. S. 4. Zus.

dorten	T	t
hier	$\frac{r\,c}{r\,gk}$	$\frac{r}{r\,gk}$

so ist die Tangente des Bogens, der den Unterschied beyder angezeigten Bogen ausmacht, nach gehöriger Rechnung $\frac{(r\,c - r).r\,gk}{r\,r\,c + gk}$

$t = 2r\frac{k}{g}$. Btang $\frac{(rc-r).rgk}{gk+rrc}$ oder den Werth von r wieder hergestellt.

$$t = 2r\frac{k}{g}\text{. Btang }\frac{r(cgk)-r(gke^{-x:k}.(c+gk)-g^2k^2)}{gk+r(c.e^{-x:k}.(c+gk)-cgk)}$$

147. Zus. Man setze statt x die ganze Höhe CA (143) auf welche der Körper steigt, nun sey überhaupt $e^{-x:k} = y$ so ist $-\frac{x}{k}$ l y also hier l $\frac{gk}{c+gk} = l\,y$ oder für gegenwärtigen Fall $e^{-x:k} = \frac{gk}{c+gk}$ daher ist die Zeit des ganzen Aufsteigens $2r\frac{k}{g}$ Btang $r\frac{c}{gk}$.

148. Zus. Wenn also $gk = c$ wird in 147. der Bogen $= 45°$ und die Zeit $2r\frac{k}{g}.\frac{1}{4}\pi(100)$.

149. Zus. Würde ein Körper mit unendlicher Geschwindigkeit aufwärts geworfen, so bekäme der Bogen (147) eine unendliche Tangente, und würde also $= \frac{1}{2}\pi$; und die Zeit des Aufsteigens wäre $\pi r\frac{k}{g}$ in welcher endlichen Zeit doch ein unendlicher Raum (143) zurückgelegt würde.

150. Zus. Wäre statt c; die Höhe CA gegeben, also (143) $CA = a = kl\frac{c+gk}{gk}$ also $e^{a:k} =$

$= \frac{c+gk}{gk}$ so fände man die Zeit (147) $2r\frac{k}{g}$.
$\mathfrak{B}$ tang $r(e^{a:k}-1)$.

151. Zus. Sie für ein unendliches k (136) zu finden ist aus (141) $r(e^{a:k}-1) = r\frac{a}{k}.(1 + \frac{a}{4k}...)$ welches sich für ein unendliches k in $r\frac{a}{k}$ verwandelt der Bogen, dem diese unendlich kleine Tangente zugehört, ist ihr gleich (An. Un. 301) also die Zeit $= 2r\frac{k}{g}.r\frac{a}{k} = 2r\frac{a}{g}$.

152. Zus. Wenn die Zeit (150) = t Secunden gegeben ist, so findet man die Höhe a so: $t = \frac{1}{1\,2\,5}.r\frac{k}{g}.\mathfrak{B}$ tang $r(e^{a:k}-1)$ (140) also $125\,t\,r\frac{g}{k} = \mathfrak{B}$ tang $r(e^{a:k}-1)$. Was nun linker Hand steht, läßt sich berechnen, weil t, g; k; gegeben sind. Die Zahl, welche aus dieser Rechnung kömmt, ist die Länge eines Bogens, dessen Halbmesser = 1, und die Tangente, die Wurzelgrösse zur rechten Hand ist. Aber weil man dieses Bogens Länge weiß, so weiß man auch wieviel er in Graden hält, und kann also aus den Sinustafeln seine Tangente = T für den Halbmesser = 1 nehmen. Folglich hat man die gegebene Grösse $T = r(e^{a:k}-1)$, und $a = kl(TT+1)$.

153. Zus.

153. Zus. Wenn man in 150; x statt k setzt, so wird die Zeit durch einen Bogen bestimmt, dessen Tangente nach 141. die Reihe $wr - S$ ist. Diese Reihe setze man statt t in An. Un. 299; so findet sich dieser Bogen; durch ein Verfahren, wie das, welches in 141. den Logarithmen gab; und also den Werth von w wieder hergestellt, die Zeit nach Eulers Rechnung (Mech. L. I. 453.)

$$r\frac{x}{g}.(2-\frac{x}{6k}+\frac{x^2}{240k^2}+\frac{x^3}{1344k^3}-\frac{x^4}{46080k^4}\ldots)$$

154. Aufg. Ein Körper wird aus C 7 F. gerade in die Höhe geworfen. Man weiß die Zeit t, wie lange er unterwegens ist, bis nähmlich an den Augenblick da er wieder in C zurückkömmt. Man sucht, wie hoch er aufgestiegen, wie lange er gestiegen, wie lange er gefallen ist, mit was für einer Geschwindigkeit er zu steigen anfing, und mit was für einer er in C zurückkömmt.

Aufl. Die Höhe, auf die er gestiegen ist, heisse x; so ist die Zeit des Aufsteigens aus 150 und des Fallens aus 149 zusammen addirt, die gegebene

$$\text{Zeit } t = 2r\frac{k}{g}.\ [\text{Btang } r(e^{x:k}-1)+l(r(e^{x:k}-1)+e^{x:2k})]$$

Kann man hieraus x finden, so weiß man einzeln wie lange der Körper gestiegen und gefallen ist, man hat auch die Geschwindigkeit mit der er aufstiege aus 140. weil das dortige a hier x, und also dieser Geschwindigkeit Höhe $= gk.(e^{x:k}-1)$ ist, so wie der Geschwindigkeit, mit der

er

er zurückkömmt, die Höhe, wie sie in 151. ausgedruckt ist, zugehört.

155. Zus. Für ein grosses k, und kleines x; (137) ist durch eine Reihe die sich nähert die Zeit des Steigens in 153; und des Fallens in 141. gegeben.

Also findet sich hier beyder Summe

$$t = r\frac{x}{g}.\left(4 + \frac{x^2}{120k^2} - \frac{x^4}{23040k^4}\cdots\right)$$

die man nach 123. in Secunden findet.

156. Zus. Diese Reihe lässt sich nach An. endl. Gr. 690. umkehren. Die dortigen x; y; λ; δ; sind hier t; r x; 1; 4; so findet man nach Eulers Rechnung Mech. L. I. 454.

$$rx = tr\,g.\left(\frac{1}{4} - \frac{g^2t^4}{2^{15}.15k^2} + \frac{g^4t^8}{2^{29}.15.k^2}\cdots\right)$$

$$x = t^2\,g.\left(\frac{1}{2^4} - \frac{g^2t^4}{2^{16}.15k^2} + \frac{g^4t^8}{2^{26}.225k^4}\cdots\right)$$

157. Zus. Die Zeit des Fallens ist um $r\frac{x}{g}.\left(\frac{x}{3k} - \frac{x^3}{672k^3}\cdots\right)$ grösser als die Zeit des Steigens.

158. Zus. Drückt man $e^{x:k}$ durch die Reihe nach An. Un. 239. aus, so gehört (154) der Geschwindigkeit mit welcher der Körper aufstieg, die Höhe $gx.\left(1 + \frac{x}{2k} + \frac{x^3}{6k^2} + \frac{x^4}{24k^2}\cdots\right)$ und der mit

welcher

welcher er zurückkömmt, die Höhe gx. (1 — $\frac{x^2}{2k} + \frac{x^3}{6k^2} - \frac{x^4}{24k^3}$ ...)

159. Anm. Man nimmt an, daß in der Natur der Wiederstand sich nach den Quadraten der Geschwindigkeit daher sieht man andere Voraussetzungen die man beym Eul. Mech. L. I. 469. sequ. untersucht findet, nur als Uebungen der Rechnung an. Warum man aber dieses voraussetzt, und wie man das bisherige anwendet, das kann nicht gewiesen werden, bis andere Untersuchungen, als über die Bewegung blosser Puncte angestellt sind.

VI. Cap.

Von der Bewegung in krummen Linien.

160. Aufg. Ein Körper will (8. Fig.) mit der Geschwindigkeit r v, den Raum AB in der Zeit dt beschreiben. Es wirkt aber in A eine Kraft p in ihn, vermöge der er (74) in eben der Zeit AC beschreiben würde, wenn er keine andere Richtung als die ihrige hätte. Ihrer Richtung Winkel mit der Richtung des Körpers, oder CAB hat den Sinus k. Wenn nun der Körper würklich in dieser Zeit AD beschreibt, so sucht man I) wie viel er von seinem ersten Wege abgewichen ist, und II) wie viel sich seine Geschwindigkeit verändert hat; oder BAD und dv.

Aufl. Der Körper ist anzusehen als würde er in A von zwo Kräften, von einer nach AB von der andern nach AC gedruckt, die sich wie diese Linien

ver-

verhielten (65). Man ergänze also das Parallelogramm unter AC und AB, so ist AD dessen Diagonale (Stat. 62.). Nun ist $AB = \frac{dt\sqrt{v}}{m}$ und AC $= \frac{pdt^2}{2m^2}$ (77) daher BD = AC in Vergleichung mit AB; unendlich klein. Da nun sin BAD: sin BDA = BD : AB; so verschwindet auch der Winkel DAB in Vergleichung mit BDA = DAC; also kann man annehmen sin BDA = sin CAB; man nehme Ab = AB so ist Bb = BD. sin BDA also = k. BD und BbA = R — $\frac{1}{2}$ BAb = R also sin $BAD = \frac{Bb}{AB} = \frac{k.AC}{AB} = \frac{kpdt}{2m\sqrt{v}}$. Für I.

Ferner wird der Weg AD angesehen, als werde er mit der Geschwindigkeit beschrieben, die der Höhe v + dv zugehört. Nun ist AD = AB + bD und $bD^2 = BD^2 - Bb^2 = BD^2.(1 - k^2)$ also $AD = AB + BD.\sqrt{(1-k^2)}$ und weil sich die Räume in einer Zeit, wie die Geschwindigkeiten verhalten $\sqrt{v} : \sqrt{(v+dv)} = AB : AD$ auch $\sqrt{v} : \sqrt{(v+dv)} - \sqrt{v} = AB : AD - AB$ aber $\sqrt{(v+dv)} = \sqrt{v}.\sqrt{(1+\frac{dv}{v})} = \sqrt{v} + \frac{dv}{2\sqrt{v}}$ (An. endl. Gr. 625.) wo man die höhern Potenzen von dv weglässt, weil nur Differentiale der ersten Ordnung gesucht werden. Also lässt sich, statt AB, BD ihre Werthe gesetzt, die letzte Proportion

portion so ausdrücken: $r v : \frac{dv}{{}_2 r v} = \frac{dt r v}{m} : \frac{p dt^2}{2m^2}$ $r(1-k^2)$ oder, die äusern und mittlern Glieder multiplicirt $\frac{p r (1-k^2)}{m} dt = \frac{dv}{r v}$. Für II.

161. Zus. Wenn $AD = ds = AB + BD$ $r(1-k^2)$, so ist $AB = ds - BD\, r(1-k^2)$ u. $p r(1-k^2) . \frac{dt r v}{m}$ oder $dv = p r(1-k^2)$. $AB = p r(1-k^2) . ds - p . BD . (1-k^2)$ das letzte Product aber verschwindet in Ansehung des ersten; weil BD, gegen ds verschwindet. Also ist $dv = p r(1-k^2)\, ds$.

162. Zus. Man setze nächst zuvor ehe der Körper in A kam, hat er den Weg $ZA = AD$ beschrieben, und beschreibe durch die Puncte Z, A, D, einen Kreis dessen Mittelpunct O sey, daß also der Winkel DAO unendlich wenig von einem rechten unterschieden ist. So sind $OZ = OA = OD$ und ZA, AD; als Wege die in unendlich kleiner Zeit beschrieben werden, gerade Linien, daher $\Delta ZOA = \Delta AOD$ und die Winkel $ZOA = AOD$ und $OZA = OAZ = OAD = ODA = R - \frac{1}{2}$ AOD. Weil nun AB die Verlängerung von ZA ist, so ist $BAD = BAO - OAD = Z + AOZ - OAD = AOZ$; Nun ist Bb in Ansehung AB unendlich klein, also als ein Kreisbogen der mit den Halbmesser AB beschrieben wäre anzusehen. Daher wegen der gleichen Winkel, (aus Geom. 44. S. 11. B.). $\frac{Bb}{AB} = \frac{AD}{AO}$.

163.

BAYERISCHE STAATS-BIBLIOTHEK MÜNCHEN

163. Zus. Ein Körper der nach der verlängerten Richtung ZA weiter fortgehen wollte, und von einer Kraft in A, nach AD abgelenket wird, beschreibt also ein Stückchen ZAD einer krummen Linie, das man als aus zwey geraden Elementen ZA, AD zusammengesetzt ansehen kann, und wo AO der Halbmesser der Krümmung an dieser Stelle ist, der folglich auf der krummen Linie Normallinie fällt. Es sey also $AO = r$; $AD = ds$; so ist $r = \frac{AB.AD}{Bb}$ das ist, weil hier der Unterschied zwischen AB und AD, in Vergleichung mit ihnen verschwindet $= \frac{AB^2}{Bb}$ welches (160.) $r = \frac{2v}{kp}$ giebt.

164. Zus. Wenn die Richtung der Kraft auf die Tangente AB fällt, so ändert der Kraft Wirkung den Weg des Körpers nicht, sondern nur seine Geschwindigkeit. Man heisst sie eine Tangentialkraft, und für sie ist $k = 0$.

165. Zus. Geht diese Kraft (164) nach AB so beschleunigt sie des Körpers Bewegung und es ist $dv = +p\,ds$ (161).

166. Zus. Geht sie aber nach AZ; so vermindert sie die Bewegung, und weil $dv = p.\cos CAB.ds$ (161) und hier $CAB = 2R$, so ist $\cos CAB = -1$ (Trig. 3. Erkl. 3. Zus.) also $dv = -p\,ds$ wie gleich aus der Entgegensetzung mit 165. erhellt.

BAYERISCHE STAATS-BIBLIOTHEK

167. Zus. Für eine Kraft deren Richtung auf AO fiele, eine Normalkraft, wäre $k = 1$ also $dv = p.o.ds$ (161). Diese Kraft änderte also die Geschwindigkeit nicht, wohl aber die Richtung um den Winkel $\frac{pdt}{2mrv}$ (160. I.) und ihre Grösse wäre $p = \frac{2v}{r}$ (163). Wäre die Normalkraft nicht da, sondern nur eine Tangentialkraft, oder auch gar keine, so würde der Körper, der in dem Elemente des Kreises ZA, in A anlangte, nach dessen Verlängerung AB fortgehen (22), und sich so vom Mittelpuncte O entfernen. Da die Normalkraft nöthig ist, ihn von diesem Wege um den Winkel BAD abzulenken, und zu machen, daß er in dem Kreise um O auch auf der andern Seite von OA noch fortgeht, so folgt, daß jeder Körper der in einem Kreise gehet, an jeder Stelle nach der dasigen Tangente fortzugehen strebet, und aus dieser Richtung durch eine Kraft, die nach des Kreises Mittelpuncte zugeht, getrieben werden muß, wenn er den Kreis zu beschreiben fortfahren soll. Dieses Bestreben, sich von des Kreises Mittelpuncte zu entfernen, heisst vis centrifuga. Man empfindet es, wenn man ein Gewicht das an einen irgendwo befestigten Faden gebunden ist, nöthigt sich mit dem Faden herum zu schwingen, denn da sieht man wie es den Faden ausdehnt. Eben so äusert sie sich wenn man andere Körper schwingt. Daher könnte man sie bequem die **Schwungkraft** nennen. Ihr

Maaß

Maaß giebt die Normalkraft von der sie aufgehoben wird $\frac{2v}{r}$, oder sie verhält sich zur Schwere wie die doppelte Höhe welche der Geschwindigkeit zugehört, zu dem Halbmesser des Kreises in dem ein Körper mit dieser Geschwindigkeit geht.

168. Aufg. Indem ein Körper der krummen Linie AMB 9 F. Element $Mm = ds$ beschreibt, wird er von zwo Kräften, einer normalen (167) $= N$ und einer tangentialen (164) $= T$ getrieben. Man sucht wie jede des Körpers Bewegung ändert.

Aufl. Seine Geschwindigkeit in M gehöre der Höhe v; so ist $Nr = 2v$ (167) und $dv = T ds$ (165; 166).

169. Aufg. Indem ein Körper der krummen Linie AMB Element Mm beschreibt, treibe ihn eine beschleunigende Kraft P nach MC; man sucht wie sie seine Bewegung ändert.

Aufl. Man fälle CT senkrecht auf die Tangente, und mr senkrecht auf CM; auch heisse $Mr = dy$, $mr = dx$. So lässt sich die Kraft nach MC; in eine Normalkraft nach TC; und eine Tangentialkraft nach MT zerlegen, welche sich wie die genannten drey Richtungen verhalten werden, (Stat. 62). also

$$T:P = MT:MC = dy:ds$$
$$P:N = MC:CT = ds:dx$$

Folglich in 168; statt T; N; ihre Wehrte durch P ausgedrückt gesetzt, $2v\,ds = P\,r\,dx$; $dv = +P\,dy$ das obere oder untere Zeichen in der letzten Gleichung

chung gebraucht, nachdem der Winkel CMm, den die Richtung der Kraft mit dem Elemente Mm, in welchem der Körper geht, macht, spitzig oder stumpf ist.

170. Anm. Wenn verschiedene Kräfte in M in dem Körper nach verschiedenen Richtungen wirken, und alle diese Richtungen nur in einer Ebene liegen, so läßt sich jede in eine Normale und Tangentialkraft zerlegen, und so erhält man aus allen zusammen eine Normal- und eine Tangentialkraft.

171. Zus. Wenn ein Körper nach MT 9 F. gehen will, und eine Kraft nach MC in ihn wirkt, so bringt sie ihn aus seinem vorigen Wege in den Weg Mm; wirkt nun in m, eben dergleichen Kraft ferner in ihn, deren Richtung noch in der vorigen Ebene CMm liegt, so wird er von m an seinen Weg wieder ändern. Und wenn so dergleichen Kraft beständig in ihn wirkt, es mag derselben Richtung sich immer parallel bleiben, oder andere Lagen bekommen, wird er seinen Weg alle Augenblicke ändern, und solchergestalt eine krumme Linie beschreiben. So verhält es sich mit einem Steine den man schief aufwärts wirft. Die Schwere zieht ihn beständig nach Richtungen nieder, die auf die Horizontallinie, welche wir hier als gerade annehmen, senkrecht, und also unter sich parallel sind; so entsteht die krumme Linie in der er wirklich fliegt, in so fern man hier den Wiederstand der Luft beyseite setzt.

172. Erkl. Eine solche Bewegung wo der Weg des Körpers nur durch eigentlich in ihn wirkende

Kräfte

Kräfte bestimmt wird, heisst man frey (motum liberum,) sie mag in einer krummen Linie wie 171. oder in einer geraden Linie, wie bey einen senckrecht fallenden Körper, geschehen. Es giebt Bewegungen wo ein Körper nicht den Weg nehmen kann, nach dem er vermöge solcher Kräfte gehen wolte, sondern einen vorgezeichneten Weg nehmen muß und wo also die Kräfte nur die Geschwindigkeit ändern können. Dergleichen ist wenn eine schwere Kugel auf einer schiefen Fläche herabrollt. Die Schwere bestimmt zwar hier die Lage des Weges der Kugel auf der schiefen Fläche (Stat. 95.) aber dieser Weg muß doch, der Fläche wegen, eine schiefe gerade Linie seyn, und die Schwere kann ihn nicht, wie sie für sich allein thun würde, zu einer lothrechten machen. Eben so muß ein schwerer Körper der an einem Faden gebunden ist, um die Stelle wo der Faden befestigt ist einen Kreis beschreiben, wenn man den Faden gespannt, aus der lothrechten Lage bringt und den Körper nur fallen läßt. Solche Bewegungen nach vorgeschriebenen Wegen werden erst künftig betrachtet, zunächst folgen die freyen.

173. Aufg. Eine unveränderliche Kraft $= g$ deren Richtungen alle auf eine gegebene Linie AP; senkrecht sind, wirkt beständig in einen Körper den man aus A nach einer gegebenen Richtung AH 10. Fig. mit der Geschwindigkeit γc geworfen hat. Man sucht die krumme Linie AMD die er beschreibt, und seine Bewegung in ihr.

Aufl. Es sey $\sin HAB = \mu$, $\cos HAB = \lambda$, der Körper habe in M die Geschwindigkeit γv.

MP, mp senkrecht auf AB, werden der Kraft Richtungen also MP mit MC 9 F. einerley seyn. Folglich ist das mr der 9 Fig. hier ein Perpendikel aus m auf MP; das ist hier Mr = dx wenn AP = x; und so 9 F. Mr, hier = mr = dy wenn MP = y. Endlich P (169) hier = g. und der dortige CMm hier = PMm stumpf. Also aus 169. dv = −gdy und 2vds = grdx. Die erste Gleichung integrirt giebt v = c − gy weil v = c für y = o. Die andere zu integriren, muß man r durch Grössen die zur krummen Linie gehören ausdrucken. Es ist aber, wenn dx unveränderlich gesetzt wird (An. Un. 543. III.) $r = \frac{-ds^3}{dx\,ddy}$ also, statt v seinen Werth gesetzt $\frac{-gds^2}{2ddy} = c - gy$ oder statt ds^2 seinen Werth $dx^2 + dy^2$ gesetzt (An. Un. 266.) $2cddy = 2gyddy - gdx^2 - gdy^2$. Wenn nun $ds^2 = dx^2 + dy^2$ und dx unveränderlich, so ist $dsdds = dyddy$, imgleichen das Differential von $\frac{ds}{dx} = \frac{dds}{dx}$ und dieses Differential mit $\frac{ds}{dx}$ dividirt, oder das Differential von $l\frac{ds}{dx} = \frac{dds}{dx}$. Nun verwandelt sich die Gleichung statt ddy seinen Werth gesetzt in $\frac{2cdsdds}{dy} = \frac{2gydsdds}{dy} - gds^2$ oder in $\frac{2cdds}{ds} = \frac{2gydds}{ds} - gdy$ oder in

dds

$\frac{dds}{ds} = \frac{-gdy}{2.(c-gy)}$; da auf beyden Seiten logarithmische Differentiale stehen, so ist nach An. Un. 407. das Integral $\frac{ds}{dx} = \frac{r\,(c-gy)}{Const}$ oder $\frac{dx}{ds} = \frac{Const}{r\,(c-gy)}$. Nun ist überhaupt $\frac{dx}{ds}$ oder $= \frac{Mr}{Mm} = cos\ m\,Mr$ und für $y=o$, $m\,Mr = HAB$ weil die gerade Linie AH des Körpers erste Richtung und folglich eine Tangente seines krummen Weges AMD ist. Also wird daselbst $\frac{dx}{ds} = cos$ $HAB = \lambda$ und $\lambda = \frac{Const}{r\,c}$ daher überhaupt $\frac{dx}{ds} = \lambda r \frac{c}{c-gy}$ oder $\frac{dx^2}{dx^2+dy^2} = \frac{\lambda^2 c}{c-gy}$ daraus folgt $dx^2(c-gy-\lambda^2 c) = \lambda c^2 dy^2$ oder $dx.r(\mu^2 c - gy) = \lambda dy r c$ oder $\frac{-g\,dx}{\lambda r c} = \frac{-g\,dy}{r(\mu^2 c - gy)}$ was rechter Hand steht, vergleiche man mit An. Un. 245, so ist

dorten	c	a	X	P
hier	1	$\mu^2 c$	$-gy$	$-\frac{1}{2}$

also $\frac{-gx}{\lambda r c} = Const + 2r(\mu^2 c - gy)$ und weil x und y zugleich verschwinden, $o = Const + 2\mu r c$

also $-gx = \lambda r\, c.\, 2(r(\mu^2 c - gy) - \mu r c)$ oder $gx = 2\lambda\mu c - 2\lambda r(\mu^2 c^2 - gcy)$. Daraus findet man, (An. endl. Gr. 191. I.) $y = \frac{\mu x}{\lambda} - \frac{gx^2}{4\lambda^2 c}$, die Gleichung der krummen Linie in welcher der Körper geht, ferner $c - gy$ oder $v = c - \frac{\mu gx}{\lambda} + \frac{g^2 x^2}{4\lambda^2 c}$, für seine Geschwindigkeit. Endlich $dy = \left(\frac{\mu}{\lambda} - \frac{gx}{2\lambda^2 c}\right) dx$, woraus nach gehöriger Rechnung $ds^2 = \frac{1}{\lambda^2}\cdot\left(1 - \frac{\mu gx}{\lambda^2 c} + \frac{g^2 x^2}{4\lambda^2 c^2}\right) dx^2 = \frac{1}{\lambda^2 c}\cdot v\, dx^2$ folgt. Also ist für das Element der Zeit (77) $\frac{m\, ds}{r v} = \frac{m\, dx}{\lambda r c}$ und die Zeit, welche für $x = o$ verschwindet, $= \frac{mx}{\lambda r c}$.

174. **Anm.** Wegen der verschiedenen Kunstgriffe zu integriren die bey dieser Auflösung vorkommen, und um diese Aufgabe aus eben den Formeln 168. aufzulösen, die in den folgenden Auflösungen müssen gebraucht werden, habe ich nicht den kürzesten Weg erwählt, den man sonst, bey dieser Untersuchung für sich gehen könnte. Es wird indessen nicht undienlich seyn, auch ihn hier anzuzeigen. Der Körper werde aus A nach AH, so geworfen, daß er in einer gewissen Zeit z. E. einer Secunde, AN durchlaufen würde, wenn ihn die Kraft g nicht niederwärts zöge, die hier der Schwere ähnlich, oder die Schwere selbst ist. Diese Bewegung des Körpers zerlegt sich in eine horizontale AK und eine verticale KN. Um KN nähmlich würde er in der Secunde gestiegen, und um AK von seiner

ersten Stelle, horizontal vorwärts nach B zu, gegangen seyn. Die Kraft ist nur dem Steigen, nicht dem horizontalen Fortgehen hinderlich. Der Körper rückt also, auch wenn sie in ihn wirkt, um AK in einer Secunde horizontal fort, das ist, er befindet sich irgendwo in der Verticallinie NGK, nur kann er nicht so hoch in ihr seyn, als er ohne die Wirkung der Kraft wäre, er ist also irgendwo unter N, in G. Weil er nun die Höhe NG, um die er wirklich mehr gestiegen wäre, wenn die Kraft nicht in ihn gewirkt hätte, während der Secunde durch die Wirkung der Kraft verlohren hat, so kann man sich nach der Art zu schliessen, die in 61. ist gebraucht worden, vorstellen, die Kraft habe die erste Secunde über nicht in ihn gewirkt, sondern ihn bis in N steigen lassen, und bringe ihn die folgende Secunde wieder durch NG herunter. Man betrachtet nähmlich zwo Wirkungen die in einer einzigen Secunde zusammen geschehen so, als geschähe erst die eine allein in einer Seeunde, und denn die andere auch allein, wieder in einer Secunde; beyde Betrachtungen müssen wohl zu einerley Bestimmung dessen was erfolgt führen. Solchergestalt ist NG, wie tief der Körper in einer Secunde fällt, wenn die Kraft g in ihn wirkt, das ist, wenn S den Fall eines schweren Körpers bey uns in einer Secunde bedeutet, (wie 36) so ist $NG = g.S$ (65) weil unsere Schwere $= 1$ gesetzt wird.

Ginge der Körper vermöge der ihm eingedruckten Bewegung, wenn g nicht wirkte in der Zeit t, durch AH; so erhellt völlig eben so, daß er wenn g in ihn diese Zeit über wirkt, senkrecht darunter in M seyn wird, HM wird seyn, wie tief er in dieser Zeit vermöge der Kraft fällt, also $HM = t^2.NG$ (80) $= t^2.g.S$

Nun sey $AN = b$, also $NK = b.\mu$; $AK = b\lambda$; so ist t in Secunden ausgedrückt $AH = bt$ (11) $x = bt\lambda$;

$PH = bt\mu$, $y = bt\mu - t^2 gS$. Weil also $t = \frac{x}{\lambda b}$

so ist $y = \frac{\mu x}{\lambda} - \frac{S g x^2}{\lambda^2 b^2}$. Nun verhält sich die Geschwindigkeit mit welcher der Körper geworfen wird, zu der Geschwindigkeit die ihm der Fall einer Secunde gäbe $= r c : r S$ (43) mit jener beschreibt er b, mit dieser 2 S in gleicher Zeit (39) also ist $r c : r S = b : 2 S$ oder $b = 2 r S c$ und $y = \frac{\mu x}{\lambda} - \frac{g x^2}{4 \lambda^2 c}$ wie vorhin.

175. Zus. Der krumme Weg des Körpers AMDB, schneidet die Horizontallinie so oft als $y = o$; folglich zweymahl, für $x = o$ und für $o = \frac{\mu}{\lambda} - \frac{g x}{4 \lambda^2 c}$ das ist für x oder $AB = \frac{4 \lambda \mu c}{g}$ und der Körper geht durch AMBD in der Zeit $\frac{4 m \mu r c}{g}$.

176. Zus. Weil $2 \lambda \mu = \sin 2 HAB$ (Trig. 19. S. 5. Z.) so heisse man $\sin 2 HAB = \varkappa$; da ist denn die **Weite des Wurfs** (amplitudo iactus) $AB = \frac{2 \varkappa c}{g}$.

177. Zus. Wenn also die Geschwindigkeit des Wurfes und die Kraft, einerley bleiben, so ändert sich doch AB mit dem Winkel des Wurfs. Es verhalten sich nähmlich die Weiten des Wurfes, bey einerley Geschwindigkeit wie die Sinus der doppelten Neigungswinkel. Es sey der Neigungswinkel $= \frac{1}{2} R - \beta$ so ist die Weite des Wurfs $\frac{2c}{g} . \sin (R - 2\beta)$ Es sey der Neigungswinkel $\frac{1}{2} R + \beta$ so ist die

die Weite des Wurfs $\frac{2c}{g}$. sin (R + 2 β) Aber R + 2 β = 2 R − (R − 2 β) Also sin (R + 2 β) = sin (R − 2 β) also sind für zwo Neigungen die eine so viel unter 45° als die andere drüber ist, die Weiten der Würfe einerley.

178. Zus. Unter den Umständen (177) ist die Weite für das grösste x am grössten. Das grösste x aber ist = 1 = sin 90° Also geht der Wurf unter dem Winkel von 45° am weitesten, und ist $\frac{2c}{g}$ (176).

179. Zus. Die Zeit durch A M verhält sich zur Zeit durch A G = A P : A K (173). Aber die horizontalen Bewegungen in diesen Zeiten wären A P; A K, (174) also ist die horizontale Bewegung gleichförmig.

180. Zus. Bey Würfen mit einerley Geschwindigkeit aber unter verschiedenen Winkeln verhalten sich die Zeiten A M D B wie die Sinus dieser Winkel (175).

181. Zus. Für das grösste y, ist $\frac{dy}{dx} = o$ (An. An. 155) oder $\frac{gx}{2\lambda^2 c} = \frac{\mu}{\lambda}$ (173), das ist, wenn D E die grösste Ordinate ist, $AE = \frac{2\lambda\mu c}{g} = \frac{1}{2} AB$ (175) $= \frac{\varkappa c}{g}$ und die grösste Ordinate selbst $DE = \frac{\mu . AB}{2\lambda}$

$-\frac{g.AB^2}{4.4.\lambda^2 c}=\frac{\mu^2 c}{g}$ und verhält sich also bey einerley Geschwindigkeit des Wurfes, wie das Quadrat des Sinus des Winkels.

182. Zus. Man ziehe MQ mit AB gleichlaufend, und heisse DQ=u; QM=w; so ist $y=\frac{\mu^2 c}{g}-u$ und $x=\frac{2\lambda\mu c}{g}-w$ (181) diese beyden Werthe in die Gleichung zwischen x, y (173) gesetzt, findet man $\frac{4\lambda^2 c}{g}.u=w^2$. Also ist (An. endl. Gr. 349) der Weg AMDB eine Parabel, deren Axe DE; ihr Scheitel D; ihr Parameter $\frac{4\lambda^2 c}{g}=a$, der sich also wie das Quadrat vom Cosinus des Winkels des Wurfs verhält, wenn c einerley bleibt.

183. Zus. Des Brennpuncts F Weite vom Scheitel (An. endl. Gr. 359) ist $\frac{\lambda^2 c}{g}$, und MF=DQ +DF (An. endl. Gr. 360)=DE−ME+DF= $\frac{\mu^2 c}{g}-y+\frac{\lambda^2 c}{g}$ (181)= $\frac{c}{g}-y+\frac{v}{g}$ (173) also gehört die Geschwindigkeit in M der Höhe g.MF.

184. Zus. Auch $EF=(\mu^2-\lambda^2).\frac{c}{g}$ (181; 183) welches nebst AE (181) vermöge des pythagorischen Lehrsatzes, $AF=\frac{c}{g}$ giebt.

185. Zus.

185. Zus. Die Parabel zu beschreiben nehme man AE und ED aus 181; da man denn sie um die Axe DE vermittelst des Parameters (182) oder auch wenn man den Brennpunct F nach 183 findet, aus An. endl. Gr. 361. beschreibt.

186. Zus. Für g = 1 ist die Kraft unsere Schwere; schief geworfene Körper fliegen also in der gefundenen Parabel in so fern der Wiederstand der Luft solches nicht ändert. Dieses hat Galiläus zuerst entdeckt, im (44) angeführten Buche, 4 Gespr. Man hat es folglich auf die Bewegung der Körper die durch Pulver fortgetrieben werden, besonders der Bomben angewandt, wovon man bis dahin sehr unrichtige Begriffe gehabt hatte, dergleichen beym Rivault Elements de l'Artillerie (Par. 1605) der sie noch von jemand anders soll erborgt haben. S. Eulers erläut. Art. Vorr. 45. S. Anm. b. und beym Rivius in s. geometrischen Büchsenmeisterey zu finden sind. Die Galiläische Theorie ist in Blondels Kunst Bomben zu werfen (Sulzb. 1686. übersetzt) ausgeführt, auch in einer Schrift von Halley die sich aus den philosophischen Transactionen in den Miscellaneis curiosis Vol. I. p. 304. befindet. A discourse concerning gravity &c. Der Graf Herberstein hat unter dem Nahmen Amari a lapide diese Theorie sehr weitläuftig ausgeführt. Artis technicae via plena & facilis &c. Stettin 1736. Man s. auch Birnbaums Unterr. für einen Artilleristen, Dresd. 1752. Ehrensverd, Anledning til skiuta och kasta bomber. II. Bok. Belidor hat im Bombardier

bardier François noch dieser Theorie Tafeln gerech. net, und mit Erfahrungen übereinstimmend gefunden. Man setzt nähmlich zum voraus, daß einerley Menge von Pulver, einerley Kugel oder Bombe mit einerley Geschwindigkeit forttreibt, und also c auf die Ladung ankömmt, und wenn diese nicht geändert wird, einerley bleibt, wie sich auch der Winkel ändert. Man wirft also die Bombe mit einer gegebenen Ladung, unter einen gegebenen Winkel, und misst die Weite des Wurfs, so kann man daraus berechnen, wie weit der Wurf mit eben der Ladung unter einem andern Winkel gehen soll (177). Belidor berichtet, daß die Rechnung ziemlich mit der Erfahrung übereingetroffen. Uebrigens ist diese parabolische Theorie des Bombenwerfens nicht richtig, weil der Wiederstand der Luft sehr beträchtlich ist, den man gleichwohl hier beyseite setzt. So sehr sich also die französischen Artillerieofficiere darüber wunderten, daß die Versuche mit Belidors Tafeln übereinstimmten, so sehr kann sich auch ein Mathematikverständiger darüber wundern, nur aus andern Ursachen. Die Bemühungen geworfener Körper Bewegungen in wiederstehender Luft zu bestimmen, gehören nicht hieher, und man ist darinnen noch nicht bis auf etwas zur Ausübung leicht brauchbares gekommen, wie aus Eulers Abhandlung, Mem. de l'Ac. de Prusse 1753; p. 321. erhellt. Wiewohl neuerlich der Hr. Graf Henning Friedrich v. Grävenitz in einer 1764. zu Bützow in Begleitung Hrn. Pr. Karstens vertheidigten Abhandlung von der Bahn der Geschützkugeln Hrn.

Eulers

Eulers Erfindungen der Ausübung noch näher zu bringen bemüht gewesen ist. Weil also die parabolische Theorie, doch immer noch in Ermangelung etwas bessern muß zu Rathe gezogen werden, so will ich noch folgendes von ihr beyfügen.

187. Aufg. Aus A einen Körper so zu werfen, daß er einen gegebenen Gegenstand M trifft.

Aufl. Also muß gegeben seyn, wie hoch der Gegenstand über den Horizont durch A, erhoben, und wie weit auf diesen Horizont bis gerade unter ihn, ist, das ist, es ist $MP = k$; $PA = b$; gegeben, und man soll also durch zweene gegebene Puncte A, M; eine Parabel beschreiben, deren Axe auf AB senkrecht steht. Hier ist also sowohl $HAB = \alpha$ als der Parameter, und c, unbekannt, die 173 gefundene Gleichung für die Parabel gibt hier, k; b; statt y; x, und $g = 1$ gesetzt $k = \frac{\mu b}{\lambda} - \frac{b^2}{4\lambda^2 c}$ wo zwo unbekannte Grössen, nähmlich HAB dem die Sinus zugehören, und c, vorhanden sind. Da nun sonst gar nichts angegeben wird, so ist die Aufgabe unbestimmt, und man kann nach Gefallen, den Winkel annehmen, und daraus c, oder c und daraus den Winkel bestimmen.

188. Zus. Der Winkel sey gegeben, man nenne ihn α so ist $k = b.\,\text{tang}\,\alpha - \frac{b^2}{4.\,\text{cos}\,\alpha^2.\,c}$, daraus findet man $c = \frac{b^2}{4\lambda^2.(b\,\text{tang}\,\alpha - k)}$, wo also die Geschwin-

schwindigkeit des Wurfs durch gegebene Grössen bestimmt wird. Ferner ist (181) $AE = 2\lambda\mu$.

$\frac{b^2}{4\lambda^2.(b.\text{tang}\,\alpha - k)} = \frac{\mu b^2}{2\lambda.(b.\text{tang}\,\alpha - k)} =$

$\frac{\text{tang}\,\alpha.b^2}{2.(b.\text{tang}\,\alpha - k)} = \frac{b^2}{2b - 2k.\cot\alpha}$, auch $ED =$

$\frac{\mu^2.b^2}{4\lambda^2.(b.\text{tang}\,\alpha - k)} = \frac{b^2}{4.\cot\alpha.(b - k.\cot\alpha)}$ und

(182) $a = \frac{b^2}{b.\text{tang}\,\alpha - k}$, da sich also die Parabel nach 185. zeichnen liesse.

189. Zus. Aus der gegebenen Weite des Wurfs $AB = e$ für einen gegebenen Winkel α findet man

$c = \frac{e}{2\sin 2\alpha}$ (181).

190. Aufg. Für einen gegebenen Winkel α; ist die Weite e; also c (189) bekannt. Man sucht den Winkel, η unter dem ein Wurf, mit eben der Geschwindigkeit, M 188 trifft.

Aufl. Hier muß man in 188; η statt α schreiben und c als bekannt ansehen. Weil nun $\frac{1}{\cos\eta} = \sec\eta$ (Trig. 4. Erkl. 5. Zus.) so ist $k = b.\text{tang}\,\eta - \frac{b^2}{4c}\sec\eta^2$ oder $k + \frac{b^2}{4c} = b.\text{tang}\,y - \frac{b^2}{4c}\text{tang}\,y^2$

also (An. endl. Gr. 78) $\text{tang}\,\eta = \frac{2c}{b} + r\left(\frac{4c^2 - 4kc}{b^2} - 1\right)$ wo c aus 189 zu nehmen ist.

Es

Es giebt also zweene η die der Frage genugthun, wie zweene Winkel einer Weite (177).

191. Zus. Wenn $\alpha = 45°$ so ist $c = \frac{1}{2}e$ (189) und

$$\text{tang}\,\eta = \frac{e}{b} \pm r\left(\frac{e^2 - 2ek}{b^2} - 1\right).$$

192. Zus. Ist $\alpha = 15°$ so ist $c = e$ und $\text{tang}\,\eta = \frac{2e}{b} \pm r\left(\frac{4e^2 - 4ke}{b^2} - 1\right)$.

193. Zus. Wenn die Aufgabe möglich seyn soll so muß $4c^2 - 4kc$ nicht kleiner als b^2 seyn.

194. Exempel. Mit einer gewissen Ladung ist eine Bombe unter 15°; auf 58 Ruthen weit geworfen worden. Man verlangt den Winkel, unter welchem man mit eben der Ladung einen Gegenstand treffen wird, der 50 R. weit vom Mörser entfernt, und 12 R. über den Horizont des Mörsers erhoben ist. Hier ist nach 192; $e = 58 = c$; $b = 50$; $k = 12$; $e^2 - ke = 58.(58 - 12) = 2668$; also $\frac{4.(e^2 - ke)}{b^2} - 1$ oder $\frac{4.(e^2 - ke) - b^2}{b^2} = \frac{4.2668 - 2500}{2500} = \frac{8172}{2500}$. Daher der irrationale Theil $= \frac{r\,8172}{50} = \frac{90,399}{50}$ und tang $\eta = \frac{106 \pm 90,399}{50} = (116 \pm 90,399).0,02$, dieses giebt für das obere Zeichen 4, 12798 und für das untere 0, 51202. Dieser Tangenten Winkel in den Tafeln zu finden, darf man nur die Tangenten mit dem Halbmesser der Tafeln 10 000 000 multi-

pliciren, da sie sich denn in 41275800, und 5120200 verwandeln, und zu 76°23′ und 27°6′ gehören.

196. Zus. Für ein gegebenes c und b, bleibt k noch veränderlich, wenn η sich ändert. Das ist, mit einerley Ladung, kann man, bey verschiedenen Winkeln des Wurfs höhere oder niedrigere Gegenstände treffen, die aber alle einerley horizontale Entfernung vom Mörser haben. Man suche welcher unter diesen Gegenständen der höchste ist. Also ist in 190; $\frac{dk}{d\,tang\,\eta} = o$ und folglich $o = b - \frac{b^2 . tang\,\eta}{2c}$

also $tang\,\eta = \frac{2c}{b}$ für den Winkel unter welchen man den höchsten Gegenstand erreicht. Dieses höchsten Gegenstandes Höhe, oder das grösste k selbst ist, den gefundenen Werth für $tang\,\eta$, in die Gleichung zwischen k und $tang\,\eta$, gesetzt; $c - \frac{b^2}{4c}$.

197. Zus. Man kann b so klein als man will, aber nicht grösser annehmen, als den weitesten Wurf 2c (178). Folglich ist in 196; $tang\,\eta$ nicht kleiner als 1; sie nimmt aber bis auf 1 ab; wenn b bis auf 2c wächst, oder je weiter der dort bestimmte Gegenstand rückt, desto kleiner ist der Winkel unter den man nach ihm werfen muß, bis dieser Winkel auf 45 Gr. abgenommen hat.

198. Zus. Man suche die kleinste Geschwindigkeit, (die schwächste Ladung) mit welcher sich ein gegebener Gegenstand treffen läßt. Hier sind in 190; k; b; gegeben, c; η; veränderlich, und man

sucht

sucht das kleinste c. Die Gleichung $4ck+b^2 = 4c.b.\text{tang}\,\eta - b^2.\text{tang}\,\eta^2$, differentiirt gibt $2.(k-b.\text{tang}\,\eta).dc = b.(2c-b.\text{tang}\,\eta).d\,\text{tang}\,\eta$ woraus $2c = b.\text{tang}\,\eta$ folgt. Diesen Werth der Tangente statt ihrer in die Gleichung 190 gesetzt, kömmt

$o = \pm r\left(\frac{4c^2-4kc}{b^2}-1\right)$ und daraus $c^2 = kc + \frac{1}{4}b^2$

und $c = \frac{k+r(k^2+b^2)}{2}$; Man braucht vor der Wurzelgrösse das Zeichen + weil −, den Werth von c verneint, und also die Wurzel daraus, die Geschwindigkeit hier unmöglich geben würde. Folglich ist $\frac{2c}{b}$ oder $\text{tang}\,\eta = \frac{k+r(k^2+b^2)}{b}$;

Man multiplicire oben und unten mit $r(k^2+b^2)-k$

so kömmt $\text{tang}\,\eta = \frac{b}{r(k^2+b^2)-k}$ und $\cot\eta = \frac{r(k^2+b^2)-k}{b} = r\left(\frac{k^2}{b^2}+1\right) - \frac{k}{b} = \frac{k}{b}.\left(r\left(1+\frac{b^2}{k^2}\right)-1\right)$. Nun sey der Winkel $MAP = \zeta$

so ist $\frac{b}{k} = \cot\zeta = \text{tang}\,(R-\zeta)$ also $\cot\eta = \text{tang}\,\zeta$.

$(\text{Sec}\,(R-\zeta)-1) = \frac{\text{Sec}\,(R-\zeta)-1}{\text{tang}\,(R-\zeta)}$ Setzt man also in Trig. 19. S. 10. Z. statt des dortigen T hier $\text{tang}\,(R-\zeta)$ so ist $\cot\eta$ oder $\text{tang}\,(R-\eta) = \text{tang}\,\frac{R-\zeta}{2}$ also $R-\eta = \frac{1}{2}R - \frac{1}{2}\zeta$ oder $R = 2\eta-\zeta$,

also $R-\eta=\eta-\zeta$. Es sey AL eine Verticallinie so ist $R-\eta=LAH$; und $\eta-\zeta=HAM$; Die Richtung AH; also nach welcher man werfen muß, M mit der geringsten Ladung zu treffen, halbirt den Winkel zwischen der Verticallinie, und der Linie nach dem Gegenstande.

199. Zus. Die Ladung zu finden, die die Bomben mit einer gegebenen Geschwindigkeit forttreibt, das ist die ein bestimmtes c gibt, erhöhe man den Mörser in einem bekannten Winkel α; und vermehre oder vermindere die Ladung so lange bis die Weite des Wurfs $2c.\sin 2\alpha$ wird (189).

200. Zus. Setzt man hier statt c seinen Werth aus 198; so hat man wie weit die schwächste Ladung werfen muß mit der sich ein gegebener Gegenstand treffen läßt.

201. Zus. Wenn man die kleinste Ladung (200) gefunden hat, könnte man folgendergestalt den Mörser richten, daß man damit den Gegenstand trifft: (11 F.) An seine Mündung A, die wie ich voraussetze auf seine Axe senkrecht ist, lege man einen ebenen Spiegel, sehe darauf längst eines Senkbleyes LA herab, und erhöhe oder erniedrige den Mörser so lange bis man im Spiegel den Gegenstand M sieht. Wenn dieses geschicht, so ist AH die Axe des Mörsers, welche den Winkel zwischen dem einfallenden und dem zurückgeworfenen Strahle MAL halbirt, und der zurückgeworfene Strahl AL ist vertical, also hat AH die gehörige Lage (198).

Beve-

Bewegung in krummen Linien, wenn in den Körper Centralkräfte (83) wirken.

202. Aufg. Ein Körper ist in A 12 F. nach einer gewissen Richtung geworfen worden. Es zieht ihn aber beständig eine veränderliche Kraft P, nach einem gegebenen Puncte C, daß er also eine krumme Linie A M beschreibt. Die veränderliche Entfernung des Körpers vom Mittelpuncte, C M heisse y; und P sey eine Function davon. Man sucht wie die krumme Linie A M, und die Bewegung des Körpers in ihr beschaffen ist.

Aufl. I. Auf die Tangente M T, falle das Perpendikel C T = p; des Bogens A M Element M m sey d s, man beschreibe mit C M den Kreisbogen M r = d x so ist m r = d y. Weil nun C M T = C m M + M C m und M C m unendlich klein ist, so ist wegen der rechten Winkel bey T; r; Δ C M T $\sim$ Δ M m r und M m : m r = C M : M T oder d s. $\sqrt{}$ $(y^2 - p^2) = y\,dy$, und m r : M r = M T : C T oder d x. $\sqrt{}(y^2 - p^2) = p\,dy$ folglich beyde nur gefundene Gleichungen verbunden; $\frac{ds}{dx} = \frac{y}{p}$ und der Halbmesser der Krümmung $r = \frac{y\,dy}{dp}$ (An. Un. 596. II.). Nun bedeuten hier d x und d y eben das was sie in 169. bedeuten. Also finden die dortigen beyden Gleichungen auch hier statt, die letzte, nach gegenwärtiger Figur, mit dem untern Zeichen, und wenn man sie verbindet, aus ihnen P wegzuschaffen,

schaffen, so kömmt $r\,dv\,dx = -2v\,ds\,dy$ oder $\frac{dv}{v} = -\frac{2\,ds\,dy}{r\,dx}$. Setzt man $\frac{y\,dy}{dp}$ statt r, und $\frac{y}{p}$ statt $\frac{ds}{dx}$ so ist $\frac{dv}{v} = -\frac{2\,dp}{p}$ deren Integrale $lv = lConst - 2lp$ oder $v = \frac{Const}{p^2}$. Nun setze man die Geschwindigkeit, mit welcher der Körper in A geworfen wird, gehöre der Höhe c; und das Perpendikel aus C auf die Richtung, nach welcher er geworfen wird, auf die dasige Tangente der krummen Linie AM (wie in 173. erinnert worden) heisse h; die Weite CA selbst sey a, so ist $v = c$ für $p = h$ daher überhaupt $v = \frac{ch^2}{p^2}$.

II. Also das Element der Zeit oder die Zeit durch Mm; $\frac{ds}{rv} = \frac{p\,ds}{hrc}$.

III. Die krumme Linie selbst zu bestimmen suche man die Gleichung $P\,r\,dx = 2\,v\,ds$ so zu ändern, daß man darinnen alles durch y; p; und dazu gehörige Differentiale ausdrückt; P ist schon eine Function von y. Solchergestalt setze man statt v seinen Werth (I), und verwandele sie dadurch in $Pp^2\,rdx = 2ch^2\,ds$. Nun setze man auch statt r und $\frac{ds}{dx}$ ihre Werthe, so kömmt $P\,dy = \frac{2ch^2\,dp}{p^3}$.

IIII. In dieser Gleichung sind die veränderlichen Grössen von einander gesondert (An. Un. 405). Man kann sie also allemahl wenigstens auf Quadraturen bringen (das. 406) das ist eine Gleichung zwischen y und p finden, die nach Beschaffenheit der nur erwähnten Integration algebraisch ist oder nicht. Eine solche Gleichung, enthält etwas das allen Puncten der krummen Linie gemein, und nur den Puncten einer gewissen krummen Linie eigen ist, daher ist sie wie andere Gleichungen krummer Linien, als eine Erklärung der krummen Linie anzusehn. Nur lassen sich aus ihr die Eigenschaften der krummen Linien nicht allemahl so bequem herleiten, als aus den Gleichungen, die wir sonst als Erklärungen krummer Linien zu brauchen gewohnt sind. In der Folge wird man dieses zu ersetzen suchen. S. unten 214. Wenigstens dienen jene Gleichungen die krumme Linien zu verzeichnen, denn aus ihnen findet man welche zwischen y und Kreisbogen (An. Un. 598) vermöge der sich die krumme Linie verzeichnen lässt (das. 104).

203. Zus. Weil $p\,ds = 2\,\Delta\,CMm$, so ist die Zeit durch Mm (202. II.) $= \frac{2\,\Delta\,CMm}{h\,r\,c}$; und also die Zeit durch AM, $= \frac{2.\text{ dem Ausschnitte } ACM}{h\,r\,c}$. Daher verhalten sich die Zeiten, in denen verschiedene Bogen AM beschrieben werden, wie die Ausschnitte von CA an gerechnet, und in gleichen Zeiten werden gleiche Ausschnitte beschrieben.

204. Zus. Die Geschwindigkeiten aber in verschiedenen Stellen, oder die r v; verhalten sich verkehrt wie die Perpendikel auf die Tangenten (202. I.).

205. Anm. Die beyden nächsten Sätze gelten, was auch die anziehende Kraft für ein Gesetz beobachtet, wenn sie nur immer nach C gerichtet ist. Denn man fand sie, indem man aus zwo Gleichungen, P, welches die Grösse der anziehenden Kraft bedeutete, wegschaffte. Von dem ersten macht Newton den Anfang der Untersuchungen von den Centralkräften Princ. L. I. Sect. II. Prop. 1. und erweiset ihn ohngefähr wie ich Astron. 277. gezeigt habe.

206. Zus. Wenn man r in $Pp^2 rdx = 2ch^2 ds$ lässt, aber statt $\frac{ds}{dx}$ seinen Werth setzt, so kömmt $P = \frac{2ch^2 y}{p^3 r}$. Diesen Satz hat Moivre erfunden, S. Keils Aufsatz an Halleyn, de legibus virium centripetarum in Keils introduct. in phys. & astron. ver. (Leiden 1725.) 585 S. und Joh. Bernoulli Op. T. I. n. 90. d. 63. Die Erfindung der Gleichung $P = \frac{2ch^2 dp}{p^3 dy}$ eignet Keil sich zu.

207. Zus. Ist P durch y gegeben, das ist, ist die Kraft gegeben, so findet man vermittelst der Integration in 202. die krumme Linie, die bey der Wirkung einer solchen Kraft beschrieben wird. Ist aber die krumme Linie gegeben, die bey der Wirkung einer unbekannten Kraft beschrieben wird, so ist eine Gleichung zwischen p, y, gegeben, aus der man also die Kraft P findet (206).

208. Zus.

208. Zus. Weil $dv = -Pdy$ (169) so ist $v =$ Const $- \int Pdy$ und also eine Function von y; weil P dergleichen ist. Folglich einerley für einerley y. Oder wenn in der krummen Linie, in welcher der Körper geht, eine gewisse Stelle so nahe bey dem Mittelpuncte ist, als eine andere, so hat er in beyden einerley Geschwindigkeit.

209. Zus. Bey Stellen die vom Mittelpuncte gleich entfernt sind, müssen die Perpendikel auf die Tangenten gleich seyn, oder gleichen y, gleiche p zugehören, (208. und 202. II.).

210. Zus. CE sey eine gerade Linie deren Lage gegeben ist. Man stelle sich vor ein Körper, den die Kraft P angeht, bewege sich in dieser Linie nach C zu. Man nehme $CN = CM = y$ und $Cn = Cm$; also $Nn = dy$; gehört die Geschwindigkeit des Körpers, der in EC herabgeht, in N der Höhe v; so gehörte die in n einer Höhe zu die um Pdy kleiner war, weil Pdy dieser Höhe Differential ist (86). Also ist $dv = -Pdy$, weil v wächst indem y abnimmt, und folglich hatte der eine Körper in n eben die Geschwindigkeit, die der andere in m hatte. So hat der Körper der sich in EC bewegt, überall eben die Geschwindigkeit, die ein anderer, der die krumme Linie beschreibt, in eben der Entfernung vom Mittelpuncte hat, wenn nur irgendwo beyder Geschwindigkeiten in gleichen Entfernungen gleich sind. Setzt man also dessen Geschwindigkeit, die sich in EC bewegt, soll sich in E anfangen, oder daselbst $= o$ seyn, so kann man aus der gegebenen EC die Ge-

schwindigkeit in M finden. Diese E C wird im folgenden, die Weite welche die Geschwindigkeiten bestimmt, heissen.

211. Zus. Es muß nähmlich E A so groß seyn, daß ein Körper der von der Kraft P in E C angezogen wird, in A die Geschwindigkeit hat, die der Höhe c zugehört (202. I.) dieses ist aus 86. zu finden. Die dortigen A; P; C; p sind hier E; N; C; P; und man findet also wie dorten, die Geschwindigkeit in einer unbestimmten Stelle N, das ist v durch einen Ausdruck gegeben der die noch unbekannte C E als unveränderlich, und C N als veränderlich enthält. In diesem Ausdrucke setze man C A = a statt C N, so muß er den Werth von c geben. Also hat man eine Gleichung wo C E durch gegebene Grössen bestimmt wird; daraus also E A gefunden wird, weil C A = a.

212. Exempel. P sey = dem p (87), so sind die dortigen a; y; hier C E, C N; und überhaupt $v = \frac{CE^{n+1} - CN^{n+1}}{(n+1)\,f^n}$ folglich $c = \frac{CE^{n+1} - a^{n+1}}{(n+1)f^n}$

oder $\sqrt[n+1]{((n+1)f^n \cdot c + a^{n+1})} = CE$.

212. Zus. Der Winkel M C m heisse d w; so ist d x = y d w (Geom. 44 S. 11 Zus.) und $ds = r\sqrt{(y^2\,dw^2 + dy^2)}$. Also (202. I.) $\frac{y\,dx}{ds}$ oder $p = \frac{y^2\,dw}{r\sqrt{(y^2\,dw^2 + dy^2)}}$ und die Zeit, in welcher der Bogen

gen M m, oder der Winkel M C m beschrieben wird (202. II.) $\frac{y^2 dw}{h r c}$. Wenn man nähmlich die Bewegung des Körpers so betrachtet, in so fern dadurch der Winkel A C M, dessen einer Schenkel C A unbeweglich liegen bleibt, um das Stückchen M C m wächst, so giebt dieses eine Winkelbewegung, wie Analys. endl. Gr. 590. die ihre gewisse Geschwindigkeit (velocitatem angularem) hat, mit der sich nähmlich der Winkel ändert. Da man hier den Winkel als den Raum ansieht, welcher zurückgelegt wird, so ist wie in (13) die Winkelgeschwindigkeit $= \frac{MCm}{dt} = \frac{h r c}{y^2}$ (212).

213. Zus. Auf entgegengesetzten Seiten der Linie C A 13 F. sey C M = C N. Man nehme gleiche Elemente der krummen Linie M m = N n, so wird auch C n = C m seyn. Denn weil die Perpendikel auf die Tangenten bey M und N gleich sind (209); so ist C M m = C N n, daher in beyden Dreyecken zwo Seiten mit den eingeschlossenen Winkeln gleich und folglich C m = C n auch M C m = N C n.

Da dieser Schluß von jedem Elemente auf das nächstfolgende fortgeht, so werden zwischen die gleichen Winkel M C O, N C Q, gleiche und ähnliche Stücken der krummen Linie M O, N Q fallen.

Wenn C A eine Normallinie an A ist, so sind die beyden gleichen Elemente A E, A B gleichviel gegen C A geneigt, oder der Winkel, den jedes mit C A macht, ist unendlich wenig von einem rechten unterschieden.

den. Daher sind CB, CE als Hypothenusen gleich. Und so gehet der nur angezeigte Schluß fort, und AEMOD; ABNQD; sind ähnliche Hälften. Wenn also ein Körper in A senkrecht geworfen wird, so beschreibt er allemahl eine krumme Linie davon AD eine Axe ist, die die krumme Linie in ähnliche Hälften theilt.

Und weil es gleichviel ist ob der Körper in A so geworfen wird, oder in seiner Bewegung mit dieser Richtung da anlangt, so theilt jede gerade Linie durch C, die auf der krummen Linie welche der Körper beschreibt irgendwo senkrecht steht, sie in ähnliche Hälften.

Auch muß CA auf die krumme Linie in D senkrecht seyn, wenn sie solche in D wieder schneidet.

214. Aufg. Die Gleichung zwischen y, und p (202. IIII.) auf eine zwischen rechtwinklichten Coordinaten, CP=x; PM=z, (12. F.) zu bringen.

Aufl. I. Wenn Mr ein Bogen mit CM beschrieben ist, so ist $y.Mr = 2\,\Delta CMr = p.Mm$, weil ΔMmr mit ΔMrC verglichen verschwindet. Druckt man also, Mr durch x, z, aus, so läßt sich p dadurch ausdrucken, und diesen Werth statt p in 202. IIII. gesetzt, giebt eine Gleichung zwischen x und z. In der Rechnung wird es bequemer seyn, y beyzubehalten, da man nach vollendeter Rechnung allemahl $z = r(y^2 - x^2)$ wieder herstellen kann.

II. Nun

II. Nun sey Cos MCP oder $\frac{x}{y} = u$; also (An. Unendl. 296) $dMCP = \frac{-du}{r(1-u^2)}$; weil nun $dMCP = mCM = \frac{Mr}{y}$ (Geom. 44 S. 11 Z.) so ist $Mr = \frac{-y\,du}{r(1-u^2)}$ und $p = \frac{-y^2\,du}{ds.\,r(1-u^2)}$. Aber $ds^2 = dx^2 + dz^2$ und $x = uy$; $z = y\,r(1-u^2)$ daher $dx = u\,dy + y\,du$; $dz = r(1-u^2).dy - \frac{uy\,du}{r(1-u^2)}$. Macht man hievon die Quadrate und sucht daraus ds; so findet sich endlich $p = \frac{-y^2\,u}{r((1-u^2)\,dy^2 + y^2\,du^2)}$.

III. Vorhin (202. IIII.) war $P\,dy = \frac{-2ch^2\,dp}{p^3}$; wo P eine Function von y ist. Des linken Theils Integral, so genommen, daß es für $y = a$ verschwindet, heisse Y; so ist $Y = Const - \frac{ch^2}{p^2}$ und weil $p = h$ für $y = a$; so ist $o = Const - c$; also $Y = \frac{c.(p^2 - h^2)}{p^2}$ und $p = h\,r\frac{c}{c-Y}$ eine Function von y die der Kürze wegen Q heissen soll.

IIII. Beyde Werthe von p (II; III.) gleich gesetzt geben $Q = \frac{-y^2\,du}{r((1-u^2)\,dy^2 + y^2\,du^2)}$ woraus

aus $\frac{du}{r(1-u^2)} = \frac{Q\,dy}{yr(y^2-Q^2)} = \frac{h\,dy\,r\,c}{yr((c-Y)y^2-ch^2)}$

folgt. Hier sind die veränderlichen Grössen von einander gesondert, und die Integration lässt sich entweder algebraisch bewerkstelligen oder auf Quadraturen bringen. Weil man nun alsdenn $\frac{x}{y}$ statt u; und $r(x^2+z^2)$ statt y setzen kann, so hat man zwischen x und z; eine Gleichung auf eben die Art wie man eine zwischen u und y hat.

215. Zus. Der Differentialgleichung linker Theil (214. IIII.) ist $= B \sin u$; (An. Un. 281) der rechte Theil muß also auch ein Bogen seyn (An. Un. 407) wenn die Integralgleichung, d. i. die krumme Linie, algebraisch werden soll.

216. Zus. Man setze er lasse sich auf die Gestalt $\frac{\lambda\,dZ}{r(A^2-Z^2)}$ bringen, wo Z eine Function von y ist, und λ; A unveränderliche Grössen sind, so ist er $= \frac{\lambda}{A} \cdot \frac{dZ}{r\left(1-\frac{Z^2}{A^2}\right)}$ also $B \sin u = \text{Const} + \frac{\lambda}{A} . B \sin Z$. Weil der Halbmesser $= 1$, so ist Z nur eine Zahl, oder seine Abmessung $= o$; (Trig. 19 S. 1 Anm.) und so sind λ; A auch Zahlen, das letzte zwar, weil sich sonst sein Quadrat nicht mit dem Quadrate von Z vergleichen liesse, das erste, weil das Differential darinn λ als ein Factor vorkömmt,

kömmt, keine Abmessung hat. Ist also $\frac{\lambda}{A}$ eine Rationalzahl, so läßt es sich als ein Bruch $\frac{m}{n}$ ausdrucken, wo m; n; ganze Zahlen sind. Folglich ist n. B sin u = n. Const + m. B sin Z. Nun lassen sich die Sinus der Bogen n. B sin u; m. B sin Z; durch n; m; u; Z; algebraisch ausdrücken (An. endl. 175.) Man heisse also diese Sinus v; w; so wird v eine algebraische Function von u; das ist von x und $y = r(z^2 + x^2)$, und w eine algebraische Function von Z; d. i. von $y = r(z^2 + x^2)$ seyn. Also ist B sin w = n. Const − B sin w und n. Const = B sin v + B sin w = B sin ($v r(1 - w^2)$ + $w r(1 - v^2)$ (Trig. 19 S.). Es ist aber n. Const als der Unterschied zweener Bogen, auch ein Bogen von einem gewissen Sinus, welchen Sinus ich b nennen will. Also kömmt $b = v r(1 - w^2)$ + $w r(1 - v^2)$ eine algebraische Gleichung zwischen v und w; d. i. x und z. Daß dieselbe oft sehr zusammengesetzt werden würde, geht mich hier nichts an, da ich hier blos die Umstände betrachte unter denen die Gleichung algebraisch werden kann.

216. Zus. Wäre aber $\frac{\lambda}{A}$ nicht rational, so liesse sich solches nicht durch $\frac{m}{n}$ so ausdrücken, daß m; n; ganze Zahlen würden, und fielen alle diese Schlüsse weg.

217. Anm. Eine krumme Linie nähmlich, deren Coordinaten auf Potenzen von irrationalen Exponenten erhoben sind, ist der völligen Schärfe nach, nicht aigebraisch, weil ihre Gleichung von keinem gewissen Grade ist (An. endl.

endl. 467). Wenn z. E. $x = z^{\sqrt{3}}$ so ist beynahe $x = z^{\frac{173}{100}}$ oder $x^{100} = z^{173}$, und näher $x = z^{\frac{1732}{1000}}$ oder $x^{1000} = z^{1732}$ und so kann man der Wahrheit immer näher und näher kommen, aber nie Potenzen von x und z angeben, die ihr völlig gemäß wären. Also kann man dieses keine algebraische Gleichung nennen.

218. Zus. Es ist aber (215) $\int \frac{dZ:A}{\sqrt{(1-Z^2:A^2)}} = \mathfrak{B}\sin(Z:A)$ (An. Un. 281). Es sey dieser Bogen was An. Un. 329; a genannt wird, so ist wenn man der Kürze wegen, $\varkappa$ statt $\sqrt{}-1$ setzt.

dorten	c	γ	$\sqrt{}-1$
hier	Z:A	$\sqrt{(A^2-Z^2):Z}$	$\varkappa$

$$\text{also } \int \frac{dZ:A}{\sqrt{(1-Z^2:A^2)}} = \frac{\varkappa}{2} l \frac{\sqrt{(A^2-Z^2)}-Z\varkappa}{\sqrt{(A^2-Z^2)}+Z\varkappa}$$

Eben so, können statt der dortigen a; c; γ; hier $\mathfrak{B}\sin u$; u; $\sqrt{(1-u^2)}$ gesetzt werden. Die Gleichung also $\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}} = \frac{\lambda.\ dZ:A}{\sqrt{(1-Z^2:A^2)}}$ giebt $\frac{\varkappa}{2}$

$$l \frac{\sqrt{(1-u^2)}-u\varkappa}{\sqrt{(1-u^2)}+u\varkappa} = \frac{\varkappa}{2}\lambda.\ l\ \text{Const} + \frac{\varkappa}{2}.\ l$$

$$\frac{\sqrt{(A^2-Z^2)}-Z\varkappa}{\sqrt{(A^2-Z^2)}+Z\varkappa}$$ wo ich $\frac{\varkappa\lambda}{2}.\ l\,\text{Const}$ annehme weil bey der Integration doch eine unveränderliche Grösse addirt werden muß, und ich die Gestalt derselben hier nach Gefallen annehmen kann, da die Grösse selbst nachgehends durch gehörige

Rechnung

Rechnung bestimmt wird. Also ist $\frac{r(1-u^2)-ux}{r(1-u^2)+ux}$ $= \text{Const}^{\lambda} \cdot \left(\frac{r(A^2-Z^2)-Zx}{r(A^2-Z^2)+Zx}\right)^{\lambda}$ oder auch, wenn man die Brüche umkehrt $\frac{r(1-u^2)+ux}{r(1-u^2)-ux}$ $= \text{Const}^{-\lambda} \cdot \left(\frac{r(A^2-Z^2)+Zx}{r(A^2-Z^2)-Zx}\right)^{\lambda}$ Man heisse M was zur Rechten steht, und multiplicire auf der linken Seite Zähler und Nenner mit $(r(1-u^2)+ux)$ so verwandelt sich der Nenner in $1-u^2-ux^2 = 1$ und es kömmt $(r(1-u^2)+ux)^2 = M$ oder $r(1-u^2) = rM-ux$, daher $u = \frac{M-1}{2x \cdot rM}$ $= \frac{rM}{2x} - \frac{1}{2xrM}$. Es sey $\text{Const}^{-\lambda} = E^2$, so ist, Zähler und Nenner mit $r(A^2-Z^2)+Zx$ multiplicirt, $M = E^2 \cdot \left(\frac{r(A^2-Z^2)+Zx)^2}{A^2}\right)^{\lambda}$ also $rM = E. \frac{(r(A^2-Z^2)+Zx)^{\lambda}}{A^{\lambda}}$. Daher $u =$

$$\frac{E(r(A^2-Z^2)+Zx)^{\lambda} - A^{\lambda}}{2x \cdot A^{\lambda}} \qquad \frac{}{2xE.(r(A^2-Z^2)+Zx)^{\lambda}}$$

In dem letztern Theile multiplicire man Zähler und Nenner mit $(r(A^2-Z^2)-Zx)^{\lambda}$ wodurch sich der Nenner in $2xE.A^{2\lambda}$ verwandelt, so wird $u =$

$$\frac{E.(r(A^2-Z^2)+Zx)^\lambda}{2x.A^\lambda} - \frac{(r(A^2-Z^2)-Zx)^\lambda}{2x.E.A^\lambda}.$$

Nun setze man $E=\left(\frac{r(A^2-C^2)-Cx}{A}\right)^\lambda =$

$\left(\frac{A}{r(A^2-C^2)+Cx}\right)^\lambda$ wodurch nichts eingeschränkt wird, weil C eine unbestimmte beständige Grösse bedeutet, die sich am Ende durch gehörige Rechnung bestimmen lässt, so kömmt u oder

$$\frac{x}{y} = \frac{(r(A^2-C^2)-Cx)^\lambda (r(A^2-Z^2)+Zx)^\lambda}{2x.A^{2\lambda}}$$

$$- \frac{(r(A^2-C^2)+Cx).^\lambda (r(A^2-Z^2)-Zx)^\lambda}{2x.A^{2\lambda}}$$

wo Z eine Function von y ist, und also wenn man statt y seinen Werth setzt, gar leicht eine Gleichung zwischen x und z erhalten wird.

219. Zus. Für $\lambda = 1$ ist $x = \frac{Zyr(A^2-C^2)-Cyr(A^2-Z^2)}{A^2}$.

220. Aufg. Die anziehende Kraft verhält sich verkehrt wie das Quadrat der Entfernung. Ein Körper wird aus A senkrecht auf CA geworfen. Man fragt was er für eine krumme Linie beschreiben wird.

Aufl. I. Die 202; 214; genannten Dinge heissen hier eben so, nur daß h=a und f sey, was es

85 war, so ist hier P, das p in 87; und das dasige $n=-2$ also $P=f^2 y^{-2}$ und (214. IIII.) $Y=\frac{f^2}{a}-\frac{f^2}{y}$ also in 214; IIII. $\frac{du}{r(1-u^2}=\frac{ady r c}{yr(cy^2-a^2c-\frac{f^2y^2}{a}+f^2y)}$.

II. Was rechter Hand steht, müsste auf eine Gestalt wie 215. erfodert wird, gebracht werden. Da muß man also statt y eine andere veränderliche Grösse setzen, und dieses würde meistens auf glückliche Versuche ankommen. Wäre nur das Quadrat von y unter des Nenners Wurzelzeichen, so könnte man das Verfahren An. Un. 404 anbringen. Da aber die Irrationalgrösse drey Theile hat, so müsste man zu dem daselbst XXXXV. angeführten Schriftsteller seine Zuflucht nehmen. Oft aber kann man in besondern Fällen, viel leichter als mit einer solchen Anwendung einer allgemeinen Methode fortkommen. Hier kann man folgendergestalt verfahren.

III. Man behalte Y bey. Es ist nähmlich $y=\frac{af^2}{f^2-aY}$ und $dy=\frac{+a^2f^2dY}{(f^2-aY)^2}$. Diese Werthe in $\frac{ady r c}{yr((c-Y)y^2-a^2c)}$ (214. IIII.) gesetzt, erhält man $\frac{du}{r(1-u^2)}=\frac{dY}{r(2BY-Y^2)}$ wo $2B=\frac{(2ac-f^2).f^2}{a^2c}$.

Hier setze man $Y = B + w$ also $dY = dw$, so kömmt

$$\frac{du}{r(1-u^2)} = \frac{dw}{r(B^2-w^2)}$$

Also ist in 215 und hier; $Z = w$; $A = B$; $\lambda = 1$ folglich nach 219; nur u statt $\frac{x}{y}$ gesetzt $u = \frac{w.r(B^2-C^2)-C.r(B^2-w^2)}{B^2}$

Nun ist $u = 1$ für $y = a$; und für eben den Werth von y wird $Y = o$ und $w = -B$; also $1 = \frac{-Br(B^2-C^2)}{B^2}$

daraus erhält man $C = o$, folglich $u = \frac{-w}{B}$; Man muß das Zeichen – brauchen, damit für $y = a$; $u = +1$ wird.

IIII. Folglich $-B.u = Y-B$, woraus man (f^2-2ac) $u = f^2\frac{-2a^2c}{y}$ erhält. Also ist, $\frac{x}{y}$ statt u gesetzt, $(f^2-2ac)x+2a^2c = f^2y$. Nun statt y seinen Werth gesetzt und quadrirt, findet sich $z^2 = \frac{4a^4c^2}{f^4} + \frac{4a^2c.(f^2-2ac)}{f^4}x \frac{-4ac.(f^2-ac)}{f^4}x^2$; die Gleichung gehört also einer krummen Linie der zweyten Ordnung und die Abscissen sind auf der Axe genommen, weil jeder zwo gleiche entgegengesetzte Ordinaten zugehören. Ist nun $f^2 > ac$ so ist der Coefficient bey x^2 verneint, also giebt es kein z für unendliche x, nnd die Linie ist eine Ellipse (An.

endl.

endl. Gr. 465). Ist aber $f^2 < ac$, so ist sie eine Hyperbel.

V. Die Axe wird von der krummen Linie in zween Puncten A, B, 14 F. geschnitten, weil die Gleichung $z^2 = o$ zweene Werthe von x giebt. Diese Gleichung wird $x^2 - \frac{a.(f^2 - 2ac)}{f^2 - ac} x - \frac{a^3 c}{f^2 - ac} = o$.

Wenn $f^2 > ac$, so ist das letzte Glied verneint, und die Gleichung hat eine Folge der Zeichen, des zweyten Gliedes Coefficient mag bejaht oder verneint seyn, also eine verneinte Wurzel, (An. Un. 190. nach Verb. des Druckf.) daher fallen die beyden Wurzeln CA, CB auf verschiedene Seiten des Punctes C; Ist aber $f^2 < ac$, so ist gewiß $f^2 < 2ac$, also der Gleichung zweytes Glied verneint, und beyde Wurzeln bejaht, oder A, und B, fallen auf eine Seite von C.

VI. Von den Wurzeln (V) ist eine bejahte $CA = a$. Man heisse die andere K; und mache aus $(x-a)$. $(x-K)$ die Gleichung $x^2 - (a+K)x + aK = o$, welche mit voriger einerley seyn muß, so ist $K = \frac{-a^2 c}{f^2 - ac}$.

VII. Für die Ellipse (IIII) ist dieses die verneinte Wurzel (V) CB; weil also das verneinte blos die Lage von C aus bedeutet, so ist der eigentliche Werth von $CB = \frac{a^2 c}{f^2 - ac}$. Also die Axe der Ellipse $AB = \frac{af^2}{f^2 - ac}$. G sey ihr Mittelpunct, so ist

$a - \frac{1}{2} AB$ oder $CG = \frac{a.(f^2 - 2ca)}{2f^2 - 2ca}$. Man setze GP $= t$; so ist $x = t + CG$, und diesen Werth in IIII gesetzt kömmt $f^4 z^2 = \frac{a^3 c f^4}{f^2 - ac} - 4ac(f^2 - ac)t^2$ Eine Gleichung für Abscissen aus dem Mittelpuncte der Ellipse.

VIII. Wenn also hier $t = o$; so ist die halbe andere Axe $GD = a\sqrt{\frac{ac}{f^2 - ac}}$ und die Weite des Brennpunctes vom Mittelpuncte der Ellipse (An. endl. Gr. 376) $= \sqrt{(\frac{1}{4} AB^2 - GD^2)} = \frac{a.(f^2 - 2ac)}{2.(f^2 - ac)}$ $= GC$; also ist C der Ellipse Brennpunct, und der Körper beschreibt eine Ellipse, deren einer Brennpunct, der Mittelpunct der Kräfte ist.

VIIII. Der Parameter der Ellipse $\frac{4GD^2}{AB}$ (An. endl. 366) $= \frac{4a^2c}{f^2}$.

X. Die Geschwindigkeit zu bestimmen, ist $v = \frac{a^2 c}{p^2}$ (202. II.) also, den Werth von p aus 214. III; und den von Y aus 220. genommen; $v = \frac{acy + (a-y)f^2}{ay}$.

221. Zus. Die Weite welche die Geschwindigkeiten bestimmt (210), findet sich aus (211) daselbst

selbst $n = -2$ gesetzt. Sie ist also $(-f^{-2}c + a^{-1})^{\frac{1}{-1}}$

$= \frac{af^2}{f^2 - ac} = AB$ (220. VII.).

222. Zus. Ob eine Ellipse oder Hyperbel beschrieben wird, kömmt auf die Geschwindigkeit des Wurfs, auf c, an (220. IIII.). Im letzten Falle nähmlich ginge der Körper um C als den Brennpunct der Hyperbel in der Hälfte der Hyperbel die nach C zu hohl ist herum, denn daß sein Weg gegen den Mittelpunct der Kräfte hohl seyn muß ist offenbahr. Ist $f^2 = ac$ so wird eine Parabel beschrieben, deren Gleichung $z^2 = 4a^2 - 4ax$, ihr Brennpunct C, der Parameter $4CA = 4a$ ist, wie man sich leicht daraus überzeugen kann, daß $a - AP$ statt x gesetzt, die Gleichung $z^2 = 4a.AP$ giebt.

223. Anm. Die Axe AB ist bejaht, verneint, oder unendlich; nachdem $\frac{f^2}{a}$ grösser, kleiner, oder so groß als o ist (220. VII.). Dieses stimmt mit dem Uebergange der Ellipse in die Hyperbel durch die Parabel, zusammen (An. endl. 391; 381.).

224. Zus. Für $f^2 = 2ac$ werden beyde Axen (220. VII; VIII.) gleich, jede $= 2a$; und $GC = o$; also wird ein Kreis beschrieben, dessen Mittelpunct der Mittelpunct der Kräfte ist.

225. Zus. Ich habe $CG = a - \frac{1}{2}AB$ angenommen, (220. VII.) also den Mittelpunct der Kräfte, in denjenigen von beyden Brennpuncten gesetzt, der am weitesten von A liegt. Der hieraus gefundene Werth für CG, ist bejaht, wenn $f^2 > 2ac$; im ent-

entgegengesetzten Falle aber verneint, und da ist C der nächste Brennpunct bey, weil dieses anzeigt, es sey $CA < \frac{1}{2} AB$.

226. Zus. Es sey $AB = E$; der Parameter $= L$, so findet man aus 220. VIIII, $c = \frac{f^2 L}{4a^2}$ und diesen Werth von c; in dem Werthe von E (220. VII.) gebraucht, ist $a = \frac{E \pm \sqrt{(E^2 - E.L)}}{2}$ Es kann nähmlich a; CA oder CB bedeuten, denn $\frac{1}{2} E = GA$ und $\frac{\sqrt{(E^2 - EL)}}{2} = GC$ (220. VIII. und An. endl. Gr. 376; 366.).

227. Zus. Die periodische Zeit oder die Umlaufszeit, in welcher der Umfang der ganzen Ellipse A M B H A durchlaufen wird ist $=$ $\frac{\text{2. der elliptischen Fläche}}{a\sqrt{c}}$ (203) $= \frac{\text{4. der ell. Fl.}}{f\sqrt{L}}$ (226). Da nun der Ellipse kleine Axe $= \sqrt{E.L}$ (An. endl. Gr. 366) so ist die elliptische Fläche $= \frac{\pi . E\sqrt{E.L}}{4}$ (An. Un. 626.) also die Umlaufszeit $= \frac{\pi E \sqrt{E}}{f}$.

228. Zus. Da für einen gegebenen Mittelpunct der Kräfte das Gesetz des Anziehens, und f, gegeben sind, so setze man, um einen Mittelpunct bewegen sich zweene Körper in Ellipsen, deren Axen

E, e,

E, e, sind, die Umlaufszeiten heissen T, t, so ist $T:t=E^{\frac{3}{2}}:e^{\frac{3}{2}}$ oder $T^2:t^2=E^3:e^3$ die Umlaufszeiten verhalten sich also wie die Quadratwurzeln aus den Würfeln der Axen (in ratione sesquiplicata axium) oder ihre Quadrate verhalten sich wie die Würfel der Axen.

229. Anm. Weil in AB die Brennpuncte liegen, so ist solches die grosse Axe (An. endl. Gr. 376.), also CA die grösste, CB die kleinste Entfernung die der Körper in seinem ganzen Umlaufe von C haben kann, folglich die Hälfte von beyder Summe, oder $\frac{1}{2}E$, die mittlere Entfernung, welche sich also wie E verhält. So sagt dieser Satz einerley mit Astron. 266.

230. Zus. Wenn $c=0$, so wäre $z^2=0$ (219. IIII.) und $AB=a$ (das. VII.) $=AC=2.CG$ für diesen Fall. Also läge G mitten zwischen A und B als den beyden Brennpuncten, deren Entfernung von einander, die Axe wäre. Das verwandelte also die Ellipse in eine gerade Linie AC. Dieses wäre die Aufgabe 87 für $n=-2$. Aus 214. III. würde hier $p=o$ wie natürlich ist, weil CA ihre eigentliche Tangente ist, auch aus 220. X;

$v=\frac{(a-y)f^2}{ay}$ wie in 87; und aus 227, wo hier $E=a$; die Zeit $=\frac{\pi a \sqrt{a}}{f}$ noch einmahl so groß

als in 103. das dortige m hier beyseite gesetzt. Dorten nähmlich war nur die Zeit des Niederganges von A nach C berechnet worden, die gegenwärtige Zeit ist die, welche ein Körper in der Ellipse brauchte von A durch B wieder nach A zurück zu kommen,

men, also noch einmahl so groß. Ist also diese Anwendung von 220. auf c=o erlaubt, so wird in 87 für n=−2, ein Körper, der in c mit unendlicher Geschwindigkeit angelange ist, von da wieder nach A durch C A zurückkehren, und so hin und hergehende Bewegungen machen.

231. Anm. Die Ursache warum man h=a gesetzt, wird sich aus folgender Betrachtung zeigen.

232. Aufg. Die Differentialgleichungen in 214; wenn M auf A fällt auszudrücken.

Aufl. I. Weil hier y=a=x so würde in 214. II; u=1; und also $\frac{1}{r(1-uu)}$ oder $\frac{-dMCP}{du}$ =∞, dieses wäre noch nichts Ungereimtes, es zeigte nur, daß bey A der Winkel ACM sich unendlich schneller veränderte als der Quotient $\frac{x}{y}$. Das würde sich so erklären lassen.

II. AE 13 F. sey das erste Element der krummen Linie; da M auf A, und m auf E fällt; so ist das erste y=CA=a= dem ersten x; das zweyte y wäre CE; man beschreibe mit CE den Kreisbogen Ef; so ist Af der Unterschied zwischen dem ersten und zweyten y; also das erste dy=−Af. Man lasse von E das Perpendikel Ee auf CA, so ist das zweyte x=Ce; also das erste dx=−Ae. Nun ist fEC=R−½ACE; eEC=R−ACE, also fällt f zwischen A und e und es ist fEe=½ACE unendlich klein, folglich auch dessen Tangente $\frac{ef}{Ee}$ un-

unendlich klein, also verschwindet fe in Vergleichung mit Ee oder es ist ein unendlich kleines der zweyten Ordnung, wenn AE, und daher Ef, Ee, dergleichen der ersten Ordnung sind. Folglich ist

$Ef = r(Ee^2 + ef^2) = Ee + \frac{ef}{2Ee} \ldots = Ee$ bey-

der Unterschied nähmlich verschwindet in Vergleichung mit jedem.

III. Nun ist hier der erste Winkel MCP = o; und der zweyte = ACE = der Veränderung des Winkels MCP an dieser Stelle. Der erste Quotient $\frac{x}{y}$ ist = 1; der zweyte $= \frac{Ce}{CE} = \frac{a - Ae}{a - Af} = 1 +$

$\frac{Af - Ae}{a - Af} = 1 - \frac{fe}{a}$ also des Quotienten Veränderung

hier $= -\frac{fe}{a}$; beyde Veränderungen also mit einander dividirt geben $-\frac{a.ACE}{fe} = -\frac{Ef}{fe}$ unendlich (II.).

IIII. Aber für y = a und 1 = u würde in 214. II;

$p = \frac{-a^2\,du}{r\,a^2\,du}$ also $\frac{-}{+}$ a nachdem man die Wurzel

aus dem Nenner nähme. Und doch sollte es da = h werden. Die dortige Rechnung giebt also einen falschen Werth für p an der Stelle A, so oft der Winkel, den die Tangente daselbst mit der Axe macht, der Winkel EAC, kein rechter ist. Hier-

aus

aus würde sich schon die Nothwendigkeit der Vorausseßung 231 zeigen. Es ist aber wohl noch der Mühe werth zu untersuchen, warum die Rechnung diesen Mangel an sich hat.

V. Sie gründete sich darauf daß $pds = Mr.y$ oder $\frac{p}{y} = \frac{Mr}{ds} = \sin CmM$. Wenn nun M auf A fällt, und sich p; y; in h, a; verwandeln, so soll solchergestalt $\frac{h}{a} = \sin CEA$ seyn, wie auch richtig ist, weil CEA von CAE nur unendlich wenig unterschieden ist, und also mit ihm in endlichen Grössen einerley Sinus $\frac{h}{a}$ hat. Es muß also in dem Ausdrucke des Quotienten $\frac{Mr}{Mm}$ wie dortige Rechnung ihn gäbe, etwas liegen, das nicht verstattet ihn da wo M auf A fällt anzubringen, wenn nicht $h = a$.

VI. Dorten ds zu finden brauchte man dz, welches aus der Gleichung $z^2 = y^2 - x^2$ gefunden ward, man brauchte zwar dorten uy statt x, es muß aber offenbahr einerley Werth von dz herauskommen, wenn man hier $z^2 = y^2 - x^2$ differentiirt, und wenn man in dem dortigen Werthe von dz, wieder $\frac{x}{y}$ statt u seßt. Nun differentiire man hier so, daß man die höheren Potenzen der Differentiale nicht weglässt (An.

Un.

Un. 16) so ist $z\,dz + dz^2 = y\,dy + \frac{dy^2}{2} - x\,dx + \frac{dx^2}{2}$; Hier können wegen der Erinnerung An. Un. a. a. O. die Quadrate von dy und dx weggelassen werden, wenn $y = a = x$; Aber weil daselbst das erste $z = o$; und das zweyte $= Ee$ ist, so ist hier $Ee = dz$ und die gefundene Differentialgleichung an den Punct A gebracht, muß $dz^2 = y\,dy - x\,dx$ heissen. Also ist klar, daß was aus der dortigen Differentialgleichung folgt, bey dem Puncte A nicht wahr seyn kann, wofern es nicht Umstände giebt, unter denen aus der dortigen und hiesigen einerley folgt.

VII. Man könnte aus jeder den Werth von dz suchen, und sehen, unter was für Umständen der dortige für $y = a$ mit dem hiesigen einerley gäbe. Für sich betrachtet, können diese beyde Gleichungen nicht gleichgültig seyn, weil für $x = y = a$; was bey beyden rechter Hand steht einerley bleibt, und doch nicht $z\,dz = dz^2$ seyn kann, wo nicht $z = dz$ wäre, welches nicht seyn kann. Man kann aber den Werth von $Mr : ds$ am Puncte A aus jeder suchen, und sehen, ob beyde unter gewissen Umständen übereinstimmen.

VIII. Wenn man in 214. II; $\frac{x}{y}$ statt u setzt, so erhält man $Mr = \frac{x\,dy - y\,dx}{r(y^2 - x^2)}$. Hierein hat z keinen Einfluß, und also ist dieser Werth auch für

$y = a$

$y = a$ wahr. Sein Nenner wird alsdenn $= o$; Man darf aber nur setzen das erste y und x, sey jedes von a um ein unendlich kleines der zweyten Ordnung unterschieden, welches hier eben so viel ist, als ob man jedes vollkommen $= a$ setzte, weil man bey dem Unterschiede zwischen dem ersten und zweyten y oder x, nur unendlich kleine der ersten Ordnung betrachtet. Nimmt man nun dieses an, so ist $r(y^2 - x^2)$ unendlich klein von der ersten Ordnung (An. Un. 4.) und giebt mit Mr hier $= AE$ multiplicirt ein unendlich kleines der zweyten Ordnung wie der hiesige Werth von $x\,dy - y\,dx$ nähmlich $a.(dy - dx) = a.\,fe$ (II.) wirklich ist.

X. Wird nun $dz = \frac{y\,dy - x\,dx}{z}$ gesetzt, kömmt

$$dx^2 + dz^2 \text{ oder } ds^2 = \frac{y^2(dx^2 + dy^2) - 2xy\,dy\,dx}{y^2 - x^2}$$

und daher $\sin CmM\,(V) = \frac{x\,dy - y\,d^2x}{r(y^2(dx^2 + dy^2(-2xy\,dy\,dx)}$ (VIIII.).

XI. Man setze $ef = w$; so ist für den Punct A; $dy = -Af$; $dx = -(Af + w)$ (II) und daher aus X; und V; $\sin CAE =$

$$\frac{a.w}{r(a^2.[(Af + w)^2 + Af^2] - 2\,a^2.Af.(Af + w))} = 1.$$

XII. Aber für den Punct A, $dz = r(a.(dy - dx))$ (VI) $= r\,aw$ (XI) gesetzt, giebt $dx^2 + dz^2$ oder $ds^2 = (Af + w)^2 + a.w.$ Und weil hier Mr $= Ef$

$= Ef = Ee$ (II.) $= dz$ (VI.) so ist des Sinus von C A E wahrer Werth $\frac{Ee}{Mr} = r$

$$\frac{aw}{Af^2 + 2.Af.w + w^2 + a.w}.$$

XIII. Es verhält sich $w : Af =$ tang e E f : tang f E A. Da nun e E f unendlich klein ist (II), so verschwindet w in Vergleichung mit A f, wenn f E A von endlicher Grösse, das ist C A E schief ist. In diesem Falle ist A f unendlich klein von der ersten Ordnung, also sein Quadrat von einerley Ordnung mit a. w, in Vergleichung mit beyden aber verschwinden A f. w und w^2. Der Sinus (XII) wird also $r \cdot \frac{a.w}{Af^2 + aw}$ und wenn er $= \frac{h}{a}$ seyn soll (V) so muß $h.Af^2 = a.(a - h).w$ seyn. So kann der Sinus XII. jede Grösse haben.

XIIII. Soll er aber $= 1$ seyn, so sind bey ihm Zähler und Nenner gleich, und $(Af + w)^2 = o$ oder $w = -Af$; d. i. e muß auf A fallen, oder der Winkel E A C ein rechter seyn.

XV. Dieses findet auch statt wenn E A C unendlich wenig von einem rechten unterschieden ist. Auch alsdenn sagt man e falle auf A, weil hier nur endliche Grössen als unterschieden betrachtet werden, die sich in unendlich kleinen von der ersten Ordnung unterscheiden. Alsdenn ist A f unendlich klein von der zweyten Ordnung wie w; und im Nenner (XII) verschwinden die Quadrate und

2 A f. w in Vergleichung mit a. w und der Sinus XII wird = 1.

XVI. Nähmlich in XIIII; XV; ist A E = E e = a w (XII) und allemahl E e = E f, also der Quotient $\frac{Mr}{Mm}$ welcher bey A sich in $\frac{Ef}{AE}$ verwandelt hier = 1.

XVII. Da also der Ausdruck in X. für sin CmM welcher bey der Rechnung 214. zum Grunde liegt, (V) am Puncte A nur alsdenn wahr ist, wenn CAE = R, in welchem Falle er daselbst mit dem Ausdrucke, der dorten gewiß wahr ist, übereinstimmt (XIII), so kann man die Rechnung 214. in diesem Falle sicher brauchen, weil der Ausdruck der bey ihr zum Grunde liegt, sonst überall, und auch bey A wahr ist. In jedem andern Falle aber würde sie unsicher seyn, denn sie nimmt etwas an, das nur in allen andern Stellen der krummen Linie, als A, und folglich nicht in allen wahr ist.

233. Anm. Das Verfahren 214. findet also nur alsdenn statt, wenn man durch C eine Abscissenlinie ziehen kann, die auf der krummen Linie irgendwo senkrecht steht. Es setzt daher zum voraus, die krumme Linie, welche beschrieben wird, sey so beschaffen, daß man aus C auf sie eine Normallinie ziehen kann, wo auch C angenommen wird. Auf jede algebraische Linie läßt sich aus jedem Puncte eine Normallinie ziehen, also ist dieses Verfahren für alle algebraische Linien zulänglich, und blos für diese braucht man es, weil man transcendentische krumme Linien eben so gut auf andere Art, als durch Gleichungen zwischen rechtwinklichten Coordinaten anzugeben, gewohnt ist. Daß bey diesen leztern nicht allemahl aus jedem Puncte

cte eine Normallinie könne gezogen werden, wird die logarithmische Spirallinie An. Un. 510. erläutern, auf die CM nie senkrecht stehen kann, wenn nicht das dortige $m = \infty$ da sie sich in einem Kreis verwandelte.

234. Aufg. Ein Körper wird in M 14 F. nach einer gegebenen Richtung geworfen, die mit CM einen schiefen Winkel CMT macht, dessen Sinus $= s$; gegeben ist, so wie die Weite $CM = y$; und die Geschwindigkeit des Wurfes, der Höhe v zugehörig. Der Punct C zieht verkehrt wie die Quadrate der Entfernungen an; Man sucht die Ellipse die er beschreiben wird.

Aufl. I. Die gesuchten Grössen sind hier a; c; nebst den daraus in 220. gefundenen Grössen, und dem Winkel MCA, welcher die Lage der Axe bestimmt. Nun war in 220. X; $p^2 = \frac{a^2 c}{v}$ also ist hier $\frac{p^2}{y^2}$ das ist die gegebene Grösse $s^2 = \frac{a^2 c}{v y^2}$ folglich $\frac{s^2 v y^2}{a^2} = c$.

II. Eben daselbst aber ist aus dem dortigen zweyten Werthe von v; $ac = av - \frac{af^2}{y} + f^2$; die Axe also welche in 226. E heisst, ist nach 220. VII; $E = \frac{f^2 y}{f^2 - vy}$.

III. Der Parameter aber (226; und 220. VIIII; und hier I; $L = \frac{4s^2 v y^2}{f^2}$.

IIII. Also sind E; L; durch die gegebenen Grössen, folglich selbst, gegeben; und so findet man durch sie a vermöge 226; und wenn nun a gefunden ist, auch c; (hier I.).

V. Aus den gegebenen Grössen, unmittelbar a und c zu finden setze man den Werth von ac in II, $= \frac{s^2 v y^2}{a}$ (I) so kömmt $a^2.(vy - f^2) + f^2 y a = s^2 vy^3$

und daher $a = \frac{f^2 y \pm y \sqrt{(f^4 - 4.s^2.yv(f^2 - vy))}}{2.(f^2 - vy)}$

woraus c nach I. gefunden wird.

VI. Die halbe kleine Axe $\sqrt{}$ E.L (227) findet sich aus II; III; hier $= 2.s.y \sqrt{\frac{vy}{f^2 - vy}}$.

VII. Des Winkels MCA, Cosinus ist (220. IIII.) $u = \frac{f^2 y - 2a^2 c}{(f^2 - 2ac)y}$. Nun ist hier aus (I; III.)

$2a^2 c = \frac{f^2.L}{2}$ also $u = \frac{f^2.(y - \frac{1}{2}L)}{(f^2 - f^2.L)y} = \frac{a.(2y - L)}{(2a - L)y}$.

$2a$

Man nenne Q den Irrationaltheil von a (226) daß $2a = E + Q$ wo $Q^2 = E^2 - E.L$ (das doppelte Zeichen vor der Wurzelgrösse kann hier verstanden werden. Bedeutet a das längste Stück der Axe von C bis an den Scheitel A; so muß man + brauchen,

chen, aber – wenn a = CB seyn soll (226),) so ist $u = \frac{(E+Q).(2y-L)}{2y.(E+Q-L)}$. Man multiplicire Zähler und Nenner mit $E-L-Q$, so wird $u = \frac{(L-2y).Q}{2y.(L-E)} = \frac{(2y-L).rE}{2y.r(E-L)} = \frac{2y-L}{2yr(-1\frac{L}{E})}$. Da nun $\frac{L}{E}$ aus II; III; gefunden wird, so erhält man endlich $u = \frac{f^2-2s^2vy}{r(f^4-4s^2vyf^2+4s^2v^2y^2)}$ welches man verneint nehmen muß, wenn a, die Weite CB bedeuten soll, da Cos MCA = – Cos MCB ist.

VIII. Des Winkels MCA Tangente ist $\frac{r(1-u^2)}{u} = r(\frac{1}{u^2}-1) = \frac{2s^2vyr(1-s^2)}{f^2-2s^2vy}$.

235. Zus. Die Axe E (234. II.) ist bejaht, verneint, oder unendlich, nachdem, f^2 grösser, kleiner, oder so groß als vy ist. Nach diesen Umständen also ist die krumme Linie eine Ellipse, Hyperbel, oder Parabel.

236. Zus. Da E; L; nie unmöglich werden kann, so lange man für y, v, s, f, mögliche Werthe annimmt (234. II; III.) so beschreibt um einen Mittelpunct, der verkehrt wie die Quadrate der Entfernungen, anzieht, jeder Körper, wie er auch geworfen wird,

einen Kegelschnitt, in dessen einem Brennpuncte C liegt.

237. Anm. Kepler hatte aus den Beobachtungen gefunden, daß die Planeten in Ellipsen um die Sonne gingen, die im Brennpuncte dieser Ellipsen läge (Astr. 247.). Newton zeigte alsdenn, daß dieses geschähe, wenn die Planeten gegen die Sonne mit einer Kraft getrieben, oder von der Sonne mit einer Kraft angezogen würden, die sich verkehrt wie das Quadrat der Entfernung verhält Princ. L. I. Pr. 11. Ich halte den Beweis hievon nicht für ganz überflüssig. Ueberhaupt aus der krummen Linie das Gesetz der Kraft zu finden, müsste man eine Gleichung zwischen p und y haben, aus deren Differentialgleichung sich P nach 206. durch y ausdrücken liesse. Für algebraische krumme Linien also, müsste man aus der Gleichung zwischen z und x; die zwischen p und y suchen, also 214. umkehren. Bey den Kegelschnitten aber weiß man schon so viel Eigenschaften, daß man sich vermittelst derselben, diese weitläuftiegre allgemeinere Bemühung ersparen kann. Ich will den Beweis, daß sich die Kraft verkehrt wie das Quadrat der Entfernung verhält, wenn ein Kegelschnitt um seinen Brennpunct beschrieben wird, vortragen, dabey ich aber, um nichts unerwiesenes vorauszusetzen, folgendes erweisen muß.

238. Lehnsatz. AMB 14. F. ist eine Ellipse deren Axe AB = a; Mittelpunct G; beyde Brennpuncte F, C; kleine Axe DH = e; Parameter = b; Ferner AP = x, GP = u = $\frac{1}{2}$a − x; PM = y; MO ist die Normallinie an M; und von O ein Perpendikel OR auf MC gelassen. Man sucht MR.

Aufl. Weil MO den Winkel FMC halbirt (An. Un. 99.) so ist MR = MO. cos $\frac{1}{2}$FMC. Da nun aus der Rechnung des Unendlichen MO bekannt

seyn

seyn muß, so suche man $\cos \frac{1}{2} FMC$ auf eine leichte Art zu bestimmen, dieses wird also MR geben.

Aber $(\cos \frac{1}{2} FMC)^2 = \frac{1 + \cos FMC}{2}$ (Trig. 19. S. 9. Zus.) und $\cos FMC = \frac{FM^2 + MC^2 - FC^2}{2.FM.MC}$ (Trig. 20. S.). Es sey $FC = r$ ($a^2 - c^2$) An. endl. 376.) $= 2e$, so ist $(\cos FMC)^2 = \frac{2.FM.MC + FM^2 + MC^2 - 4e^2}{4.FM.MC}$ aber weil $FM + MC = a$ (An. endl. 378.), so ist des nächstvorhergehenden Bruches Zähler $= a^2 - 4e^2 = c^2$ auch $FM.MC = (\frac{1}{2}a - \frac{2eu}{a}).(\frac{1}{2}a + \frac{2eu}{a})$ (eben das.) $= \frac{1}{4}a^2 - \frac{4e^2u^2}{a^2} = \frac{a^4 - 16e^2u^2}{4a^2}$ folglich $\cos FMC$ oder $\frac{MR}{MO} = \frac{ac}{r(a^4 - 16e^2u^2)}$. Ferner für die Kegelschnitte $p = \frac{b.(a-2x)}{2ay}$ (An. Un. 524) hier $= \frac{bu}{ay} = \frac{c^2u}{a^2y}$ (An. endl. 366.) daher $1 + p^2 = \frac{a^4y^2 + c^4u^2}{a^4y^2}$ wo aus An. endl. 368; der Zähler $= \frac{a^4c^2}{4} + c^2u^2.(c^2 - a^2) = \frac{a^4 - 16e^2u^2}{4} c^2$ wird.

Also ist aus An. Un. 526; $MO = \frac{cr(a^4 - 16e^2u^2)}{2a^2}$

und daher $MR = \frac{c^2}{2a} = \frac{1}{2}b$. oder: An einen willkührlichen Punct der Ellipse M, ist aus dem Brennpuncte eine gerade Linie, und auf solche ein Perpendikel von dem Durchschnitte der Axe mit der Normallinie dieses Punctes gezogen. Zwischen diesem Puncte und dem erwähnten Perpendikel ist alsdenn auf der gezogenen Linie CM, ein Stück MR, dem halben Parameter gleich enthalten.

Weil $OMC = OMF$, so sind die Perpendikel aus O auf MC, MF, und die von ihnen auf beyden Linien abgeschnittenen Stücken gleich. Also gilt dieß von jedem Brennpuncte.

Weil ferner dieses abgeschnittene Stück nur durch des Parameters Grösse, keinesweges durch die Axe, bestimmt wird, so ist der Satz von allen drey Kegelschnitten wahr, weil die andern beyden sich von der Ellipse nur in Absicht auf die Axe unterscheiden (An. endl. 384; 391).

239. Aufg. Ein Körper beschreibt um den Brennpunct C 14. F. die Ellipse AMB deren grosse Axe $AB = E$; Parameter $= L$; Mittelpunct $= G$; $CP = x$; $PM = z$, $CM = y$, das Perpendikel auf die Tangente, $CT = p$; man sucht das Gesetz der Kraft.

Aufl. Die Normallinie MO sey $= w$; und r heisse der Halbmesser der Krümmung bey M, so ist

CMT

$CMT + OMC = 90°$ daher $\frac{CT}{CM} = \frac{MR}{MO}$ also weil nach 238; $MR = \frac{1}{2}L$; $p = \frac{Ly}{2w}$. Es sey CA $= a =$ dem Perpendikel aus c auf die Tangente in A; folglich (206) $P = \frac{2ca^2y}{p^3r}$. Aber, wenn man An. Un. 547. in dem dortigen Ausdrucke des Halbmessers der Krümmung durch w; den Druckfehler verbessert, und 4 statt 64 liest, auch r, L statt der dortigen z, b, setzt, so ist $r = \frac{4w^3}{L^2}$ also hier $p^3 r = \frac{Ly^3}{2}$, und $P = \frac{4a^2c}{Ly^2}$. Die Kraft verhält sich also verkehrt wie das Quadrat der Entfernung.

240. Anm. Newton hat 239. erwiesen, aber nicht deutlich gezeigt, daß umgekehrt, wenn sich die Kraft so verhält, ein Kegelschnitt beschrieben würde. Denn im 17 S. des 1. B. nimmt er schon an, es werde ein Kegelschnitt beschrieben, und sucht nur was es für einer sey. Diese Erinnerung hat Joh. Bernoulli mit Grunde gemacht, und zuerst in den Mem. de l'Ac. des Sc. 1710. eine allgemeine Auflösung der Aufgabe gegeben: Aus dem Gesetze der anziehenden Kraft die krumme Linie zu finden, die der Körper beschreibt, welches man die verkehrte Aufgabe der Centralkräfte genannt hat, weil Newton nur gewiesen hatte, wie aus der gegebenen krummen Linie das Gesetz der Kraft zu finden sey (Op. Io. Bern. T. I. n. 86.). Dieses letztere ist viel leichter als jenes. Denn es braucht nur die Vergleichung zwischen p und y oder p und r, aus der Natur der krummen Linie, und folglich nur zu differentiiren, da jenes zu integriren erfodert. Daher ist auch jenes nicht

eher bewerkstelliget worden, bis Bernoulli durch seine Erfindungen, die Integralrechnung beträchtlich erweitert hatte, dieses aber war bald in der Gewalt derjenigen, die sich bey der ersten Bekanntmachung der Rechnung des Unendlichen, mit differentiiren beschäfftigten. Keil hat nach Joh. Bernoulli diese Erfindung in die Ausdrückungen der Fluxionenrechnung übersetzt, und den Newton gegen Bernoullis Erinnerungen auch hier nicht glücklicher als sonst vertheidiget. Introd. ad Phys. & Astr. ver. (Leid. 1725.) p. 598.

Anwendung des bisherigen auf die physische Astronomie.

241. Aufg. Zum voraus gesetzt, daß die bisherigen Berechnungen bey den himmlischen Körpern statt finden, die Umlaufszeit (227) in Secunden anzugeben.

Aufl. Sie fand sich aus 202; II; welches mit m sie nach 77. muß multiplicirt werden. Sie ist also, E und f in Tausendtheilchen des rheinländischen Fusses ausgedrückt, $\frac{\pi . E . r E}{250 . f}$ Secunden. Bey den himmlischen Körpern aber, wo gewöhnlich ist, die Längen durch Halbmesser der Erde anzugeben, muß man diesen Ausdruck darnach einrichten. Es enthalte der Halbmesser der Erde α Fuß $= 1000 \alpha$ Tausendtheilchen, und E enthalte β Halbmesser der Erde, folglich $\beta . \alpha . 1000$ Tausendtheilchen eines Fusses; aber f enthalte γ Halbmesser der Erde, also $\gamma . \alpha . 1000$ Tausendth. so ist $\frac{E r E}{f} = \frac{\beta . r \alpha . \beta . 1000}{\gamma}$

=

$= \frac{10\beta^{\frac{3}{2}} . r\,10.\alpha}{\gamma}$ und daher die Umlaufszeit $=$

$\pi.\beta. \quad r\,10\alpha \quad {}^{3:2}$
$\overline{25.\gamma}$.

242. Exempel. Sezt man mit Eulern Mech. L. I. §. 670; $\alpha = 20302353$ so erhält man $r\,10\alpha = r\,203023530 = 14248,63$. Die Ganzen findet man gleich in Ludolfi Tetragonometria. Dieses nun mit $\frac{1}{2\,5} = 0,04$ multiplicirt, und des Products lezte Zifer als ungewiß weggelassen, giebt

die Umlaufszeit $\frac{569,945.\pi.\beta}{\gamma}^{3:2}$, wo β und γ, Mengen von Halbmessern der Erde bedeuten.

243. Aufg. Um zweene Puncte die beyde v. w. d. Qu. d. E. anziehen, wie etwa C, C, 13; 14; F. seyn möchten, gehen zweene Körper in bekannten Umlaufszeiten. Man sucht daraus wie sich die Stärken der anziehenden Kräfte beyder Puncte gegeneinander verhalten.

Aufl. I. Wenn beyde Puncte nicht gleich stark anziehen, so wird, gleiche Entfernungen von beyden genommen, der eine in dieser Entfernung stärker anziehen als der andere. Diese Entfernung sey $= a$, und die Kraft, mit welcher der eine Punct in diese Entfernung anzieht, verhalte sich zu unserer Schwere wie P : 1; die Kraft, mit welcher der andere

anzieht wie p : 1 ; oder die Gewichte dreyer Massen, deren eine auf unserer Erde läge, die andern beyden in Entfernungen = a vom ersten und vom zweyten Puncte wären, verhielten sich wie 1; P; p; Unserer Schwere aber, sey die anziehende Kraft des ersten Punctes in der Entfernung F; des andern in der Entfernung f gleich. So ist, wegen des angenommenen Gesetzes $a^2 : F^2 = 1 : P$ und $f^2 : a^2 = p : 1$; Also $P : p = F^2 : f^2$.

II. P, p, sind veränderlich, in jeder andern Entfernung nähmlich anders; da aber die Entfernung, für welche beyde gehören, hier aus der Rechnung gegangen ist, und sich die Verhältniß P : p durch die Verhältniß der Quadrate von zwo unveränderlichen Grössen F, f, gibt, so erhellt, daß die Verhältniß der veränderlichen P : p unveränderlich ist, und das wird also die Verhältniß der anziehenden Kräfte seyn.

III. Der Körper, welcher um den ersten Punct geht, beschreibe eine Ellipse, deren grosse Axe E ist, in der Umlaufszeit T; der, welcher um den zweyten Punct geht, eine Ellipse deren grosse Axe e ist, in der Umlaufszeit t; so ist (227)

$$T : t = \frac{E \sqrt{E}}{F} : \frac{e \sqrt{e}}{f}.$$

Folglich

$$F : f = \frac{E \sqrt{E}}{T} : \frac{e \sqrt{e}}{t} \text{ also (1) } P : p = \frac{E^3}{T^2} : \frac{e^3}{t^2},$$

oder die anziehenden Kräfte verhalten sich, wie die Würfel der Axen mit den Quadraten der Zei-

Zeiten dividirt. Statt der Axen braucht man die mittlern Entfernungen (229).

244. Zus. Der erste Punct sey die Sonne, und der zweyte ein Hauptplanet, der selbst einen Nebenplaneten um sich hat, so hat man auf diese Art, wie sich die Schwere gegen die Sonne zur Schwere gegen den Hauptplaneten verhält.

245. Zus. Sind aber beyde Puncte Hauptplaneten, die Nebenplaneten um sich haben, so kann man solchergestalt die Schwere gegen beyde mit einander vergleichen.

246. Zus. Da noch keine Entfernungen und Umlaufszeiten, von Nebenplaneten um den Merkur, die Venus, den Mars bekannt sind, so kann man die Schwere gegen diese Körper nicht mit der unsrigen und der gegen die Sonne vergleichen. Bey den übrigen Hauptplaneten aber geht dieses an.

247. **Exempel zu 244.** Die Schwere nach der Sonne mit der unsrigen zu vergleichen.

Hier ist der Nebenplanet der Mond; also E= der Axe der Erdbahn; oder der doppelten mittlern Weite der Erde von der Sonne;

T= dem Sonnenjahre.

e= der doppelten mittlern Weite des Mondes von der Erde,

t= dem periodischen Monate (Astron. 213).

Weil mir hier mehr daran gelegen ist, das Verfahren des Erfinders dieser Berechnung, Newtons zu erläutern, als die Rechnung selbst aufs schärfste zu bewerkstelligen, so will ich seine Zahlen aus der

Londner Ausgabe der Principior. v. 1687. dazu annehmen, obgleich jetzo richtigere bekannt seyn möchten. Er setzt also

t = 27 Tage 7 St. 43 M. (Princ. L. III. Pr. 8. Cor. 1.

$\frac{1}{2}$ e = 60 (das. Pr. IIII.).

Die Weite der Erde von der Sonne, die er annimmt, muß man daraus berechnen, daß er die Horizontalparallaxe der Sonne 20 Sec. (Prop. VIII. Cor. 1.) setzt. Also ist, den Halbmesser der Erde zur Einheit angenommen, die Weite der Sonne

$$\text{von der Erde} = \frac{1}{\sin 20\ \text{Sec.}}$$ (Astr. 155). Man findet aber aus An. Un. 285. und 309. sin 20 Sec. = 0,00009696;

Daher die Weite der Sonne = 10313 = $\frac{1}{2}$ E.

Endlich setze ich T = 365,25 Tage, und nehme t = 27$\frac{1}{3}$ Tag = 27,333.

$$\text{Also ist } P : p = \frac{E^3 . t^2}{e^3 . T^2} : 1$$

Nun

$l \frac{1}{2} E = 4,0133850$	$l t = 1,4366396$
$l \frac{1}{2} e = 1,7781512$	$l T = 2,5625902$
$l \frac{E}{e} = 2,2352338$	$l \frac{t}{T} = -1,1259506$
$l \frac{E^3}{e^3} = 6,7057014$	
$l \frac{t^2}{T^2} = -2,2519012$	
$l \frac{P}{p} = 4,4538002$	

Dieß

Dieß gäbe P : p = 28430 : 1. Newton Princ. L. III. Prop. 8. hat 28700 : 1. Dieser Unterschied kann von kleinen Aenderungen in den Zahlen herkommen und ist hier nicht beträchtlich, da ich nur das Verfahren erklären will. Jeder, der andere Zahlen, die nach dem jetzigen Zustande der Astronomie für richtiger gehalten werden, brauchen will, kann mit denselben diese Rechnung wiederhohlen. Daher stehen ganz andere Verhältnisse der Schweren in der Ausgabe von Newtons Princ. c. comm. le Seur & Jacquier a. a. O. Die Erklärer aber, muthmassen nur was für Zahlen dabey zum Grunde liegen, und haben die Verhältnisse nicht wirklich berechnet.

248. Zus. So erhellt wie man die nöthigen Grössen aus der Astronomie vorausgesetzt, Newtons Zahlen a. a. O. oder aus andern gegebenen Grössen andere finden kann.

249. Zus. So hat man die Verhältniß F : f = r P : r p.

250. Exempel. In den 247. gefundenen Zahlen = r 28430 : 1 = 168,61 : 1 Da nun f = 1 weil man bey unserer Schwere, die Körper auf der Oberfläche der Erde, oder um ihren Halbmesser vom Mittelpunct der Erde, den man eigentlich als den anziehenden Punct betrachtet, entfernt annimmt, so müsste ein Körper, der nach der Sonne eben so stark sollte getrieben werden, als bey uns nach der Erde, von der Sonnen Mittelpuncte 168, 6 Halbmesser der Erde entfernt seyn.

251. Anm. Euler Mech. L. I. §. 666. sagt er setze mit Newton bey der Sonne und der Erde P:p = 227512:1, meldet aber nicht, wo Newton diese Verhältniß angebe. An dem 247. angeführten Orte, steht 169282:1 und so wird sie bey Mac Laurin Account of Newt. discov. B 3. ch. 5. wiederhohlt. Nimmt man aber Eulers Verhältniß an, so folgt $F:f = \sqrt{}227512:1 = 476,98:1$.

252. Zus. Wenn in 242. die Rede von Umlaufszeiten der Planeten um die Sonne, also die Sonne der anziehende Punct ist, und man nach 251; $\gamma = 477$ setzt, so kömmt jedes Planeten Umlaufszeit $\frac{569,945.\pi}{477}.\beta^{3:2}$ oder wenn man $\pi = 3,141592653$ setzt (An. Un. 308) $3,7537.\beta\sqrt{}\beta$ Secunden.

253. Zus. Die Geschwindigkeit eines Planeten in A, seiner entferntesten Stelle von der Sonne C; (226) der Sonnenferne (Astr. 235.) aus der Gestalt von desselben Bahn zu finden, verfährt man folgendermassen. Es sey die Axe = E, die Weite der Brennpuncte CF 14. F; = D. In 220. VII. war die Axe $E = \frac{af^2}{f^2 - ac}$ und $a = \frac{1}{2}E + \frac{1}{2}D$ (226) also $\frac{f^2.(E-a)}{a.E}$ oder $c = \frac{E-D}{E(E+D)}.f^2$

254. Anm. Drückt man hier E, D, f, in Halbmessern der Erde aus, und nimmt solchergestalt $f^2 = 227512$ an, (denn das hiesige f ist das dortige F;) so kömmt $c = \frac{227512.(E-D)}{(E+D).E}$ in Halbmessern der Erde.

255. Er.

255. Er. Setzt man mit Eulern Mech. L. I. §. 668. für die Erde E = 41312; D = 743 so kömmt nach Eulers Rechnung c = 5,323, oder die Erde hat in ihrer Sonnenferne eine Geschwindigkeit, die ein schwerer Körper am Ende eines Falles durch 5,323 Halbmesser der Erde haben würde.

Wollte man zur Uebung hieraus diese Geschwindigkeit der Erde wirklich berechnen, so fände man, α aus 242. angenommen, die Höhe des nur erwähnten Falles 108069425 Fuß; die Quadratwurzel daraus ist nach Ludolfs Tafeln 10397 und verhält sich zu 0,125 wie die Geschwindigkeit der Erde zu der Geschwindigkeit, die ein Körper durch den Fall, der eine Secunde lang dauerte, erhält (36; 42). Wie vielmahl also die Geschwindigkeit der Erde grösser ist, findet man leicht durch die Logarithmen.

Es ist aber $l\frac{10397000}{125} = 4,9199044 = \log 83158$

oder der Erde Geschwindigkeit ist 83158 mahl grösser. Sie durchläuft also in einer Secunde 83158. 31,25 Fuß (39) oder 2598687 Fuß.

256. Zus. Sieht man mit Newton Princ. L. I. Prop. 7. die anziehende Kraft als eine gemeine Eigenschaft der Materie an, so verhält sich die ganze anziehende Kraft eines Weltkörpers wie seine Masse. Und so kann man aus 248; die Massen der Weltkörper mit einander vergleichen.

In Newtons Zahlen (247), verhalten sich die Massen der Sonne und der Erde wie 28700:1.

257. Zus.

257. Zus. Die Dichtigkeiten verhalten sich wie die Massen mit den Grössen dividirt (Hydr. 31). Newton setzt a. a. O. Prop. VIII. cor. 3. die Durchmesser der Sonne und der Erde wie 10000:208; Also sind dieser beyden Körper Dichtigkeiten wie $\frac{28700}{10000^3} : \frac{1}{208^3} = 1 : \frac{10000^3}{208^3\ 28700}$. Das letzte Glied findet man vermittelst der Logarithmen 3,871 daher sich die Dichtigkeiten der Sonne und der Erde wie 100:387 verhalten.

Ein anderes Exempel zu 202.

258. Aufg. Die Kraft verhält sich verkehrt wie der Würfel der Entfernung, man sucht des Körpers Weg.

Auflösung I. Alles wie in 202. gesetzt; ist $P = \frac{f^3}{y^3}$ also in 214; IIII; $Y = \frac{1}{2} f^3 . \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{y^2}\right) = c - \frac{ch^2}{p^2}$ welches die Gleichung für die krumme Linie zwischen y und p ist.

II. Auch ist aus 202; I; $\frac{ch^2}{p^2}$ oder $v = c - \frac{1}{2} f^3 . \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{y^2}\right)$.

III. Es sey $c = \frac{f^3}{2a^2}$ so kömmt aus (I) $p = \frac{hy}{a}$ oder der Winkel CMT, dessen Sinus $\frac{p}{y}$ ist, ist

bestän-

beständig so groß, als der Winkel bey A, dessen Sinus $\frac{h}{a}$. Also wird hier die Logarithmische Spirale, die den erwähnten Winkel macht, beschrieben (An. Un. 510). Weil bey ihr $v = \frac{f^3}{2y^2}$ so verhält sich die Geschwindigkeit verkehrt wie die Entfernung vom Mittelpuncte.

IIII. Es sey $c = \frac{f^3}{2h^2}$; so kömmt $p = \frac{ahy}{r(a^2h^2 + (a^2 - h^2)y^2)}$, die hyperbolische Spirale (An. Un. 599.). Joh. Bernoulli hat zuerst gefunden, daß sie diesem Falle genug thut. Act. Er. Lipf. 1713. und Op. T. I. n. 90. §. 65.

V. In andern Fällen, lehrt Euler Mech. L. I. §. 671. die Gleichung auf rechtwinklichte Coordinaten bringen, und die algebraischen krummen Linien, die darunter enthalten sind, finden.

259. Zuf. Die Weite, welche die Geschwindigkeiten bestimmt, wird, wenn man $n = -3$ in 211 setzt, $= af\,r\frac{f}{f^3 - 2a^2c}$; also bey der logarithmischen Spirale (258. III.) unendlich.

260. Zuf. Weil y abnimmt, wenn ACM zunimmt, so ist $Mr = -dy$, und daher aus 202; I; 13. F. oder $ds = \frac{-y\,dy}{r(y^2 - p^2)}$, in der logarithmischen

Spirale aber $p = \frac{hy}{a}$, also $ds = \frac{-ady}{r(a^2-h^2)}$ so wird, statt c seinen Werth aus 258; II; gebraucht, in 202. II. das Element der Zeit $-\frac{a}{f} r \frac{2}{(a^2-h^2)f} \cdot y\,dy$. Dieses so integrirt, daß es für $y = a$ verschwindet, gibt die Zeit durch den Bogen AM; $\frac{a(a^2-y^2)}{fr\,2f(a^2-h^2)}$. Uebrigens ist hier $v = \frac{f^3}{2y^2}$.

261. Zus. $\mathrm{Col\,CMT} = \frac{r(y^2-p^2)}{y}$ hier $= \frac{r(a^2-h^2)}{a}$. Nennt man ihn also k; und die Zeit (260) $= T$; so findet man $y = r(a^2 - kfTr\,2f)$.

262. Zus. Für $y = o$, ist $T = \frac{a^2}{kfr\,2f}$. In dieser Zeit also kömmt der Körper durch unzählige Umwindungen der Spirale in C.

263. Anm. Man hat besonders die Gesetze der anziehenden Kraft betrachtet, wo sich algebraische krumme Linien geben. Dieses findet auser den beyden Fällen 220; und 258. V. auch noch statt, wenn die anziehende Kraft sich wie die Entfernung selbst verhält, oder $n = 1$; da wird eine Ellipse beschrieben, deren Mittelpunct in C ist. Bey andern Gesetzen der anziehenden Kraft, giebt es doch gewisse Bedingungen, unter denen die krummen Linien algebraisch werden. Mir ist es hier nicht verstattet davon, und von den fernern Untersuchungen, die man über die Wege angezogener Körper anstellen kann, weitläuftiger zu handeln. Ich will nur noch eine kurze Untersuchung einer besondern krummen Linie mittheilen.

264. Aufg. Ein Körper, der nach C von einer Kraft P gezogen wird (12. F.), bewegt sich in der krummen Linie AM so, daß er sich dem Puncte C in gleichen Zeiten gleichviel nähert, oder gleichweit von ihm entfernet; Man sucht die Beschaffenheit dieser krummen Linie, und das Gesetz der Kraft.

Aufl. I. Ich nenne alles wie in 202; beschreibe aber noch mit dem Halbmesser CD = b einen Bogen DB = u; wo Bb = du, und daher $dx = \frac{y\,du}{b}$.

II. Die angenommene Bedingung erfodert, daß sich mr oder dy wie das Element der Zeit verhält. Man setze also das Element der Zeit = n. dy, wo n eine unveränderliche Grösse bedeutet. Also ist aus 202; II; $\frac{mpds}{hrc} = ndy$ (wo m aus 77 ist).

Aber $pds = ydx = \frac{y^2\,du}{b}$ (II). Also $du = \frac{nbhrc}{my^2}.dy$ dafür ich $\frac{\lambda.dy}{y^2}$ schreiben will. Folglich $u = Const - \frac{\lambda}{y}$ und weil $u = o$ für $y = a$; so ist $u = \frac{\lambda.(y-a)}{ay}$ und $\frac{a\lambda}{\lambda - au} = y$, da man also das jedem u zugehörige y finden und daher die krumme Linie verzeichnen kann (An. Un. 598.).

III. Wenn die Zeit als eine Zahl angesehen, oder ihre Abmessung = o gesetzt wird, so ist von m (77)

die Abmessung $\frac{1}{2}$; folglich 1 von $\frac{mpds}{hrc}$ und daher o von n; und 2 von λ.

IIII. Weil CMm = 2R − CmM − MCm und MCm unendlich klein ist, so ist tang CMm = − tang CmM (Trig. 4. Erkl. 1. Zus.) = $\frac{-dx}{dy}$ = $\frac{-ydu}{bdy}$ (I) = $\frac{-CT}{MT}$ = $\frac{-p}{r(y^2-p^2)}$ welches sich für A in $\frac{-h}{r(a^2-h^2)}$ verwandelt. Diese Tangente des Winkels, den die krumme Linie bey A, über CA, mit CA macht, heisse −⊙; ich setze nähmlich, daß der Bogen AD mit CA, einen stumpfen Winkel macht, wie Mm mit CM, so ist ⊙ = $\frac{ydu}{bdy}$ für y = a; oder wenn y = a gesetzt wird, so muß $\frac{du}{dy}$ = $\frac{b⊙}{a}$ seyn. Da nun überhaupt aus II; $\frac{du}{dy}$ = $\frac{λ}{y^2}$ so ist $\frac{b⊙}{a}$ = $\frac{λ}{a^2}$ oder λ = ab⊙. Der II. gefundene Werth von y verwandelt sich also, in y = $\frac{ab⊙}{b⊙-u}$; oder, b = 1 gesetzt, in y = $\frac{a⊙}{⊙-u}$ welches von der An. Un. 599. II. gefundenen Gleichung nur darinnen unterschieden ist, daß dorten +u steht. Nähmlich dorten nahm y ab, wenn u wuchs (das. I) das ist, u bedeutet des Bogens BE Fortsetzung unter

ter CA, und ist also wie eine verneinte Abscisse anzusehen. Folglich ist die gefundene Gleichung für die hyperbolische Spirallinie, welches also die Linie ist, in der sich ein Körper dem Mittelpuncte C in gleichen Zeiten gleichviel nähert, oder gleichviel von ihm entfernet.

V. In $\lambda = a b \odot$ (IIII) den Werth von λ gesetzt (II) giebt $n = \frac{m a \odot}{h r c}$ woraus man sieht, wie die willkührlich angenommene Zahl n bestimmt wird.

VI. Das Gesetz der Kraft, vermöge welcher diese Spirale beschrieben wird, ist zwar schon aus 258; IIII. bekannt. Wollte man es aber hier unmittelbar zur Uebung von (207) finden, so könnte man so verfahren. Aus $du = \frac{\lambda dy}{y^2}$ (II.) findet man (vermöge I.) $dx = \frac{\lambda dy}{by}$ daher Mm oder $ds = dy$. $\frac{r(b^2 y^2 + \lambda^2)}{by}$ und aus (II); $\frac{y^2 du}{b ds}$ oder $p = \frac{\lambda y}{r(b^2 y^2 + \lambda^2)} = \lambda . (b^2 + \lambda^2 y^{-2})^{-\frac{1}{2}}$ denn der letzte Ausdruck ist zum Differentiiren am bequemsten, weil er nur an einem Orte was Veränderliches enthält. Also $dp = \lambda . -\frac{1}{2} . -2\lambda^2 y^{-3} . (b^2 + \lambda^2 y^{-2})^{-\frac{3}{2}}$ woraus man $dp = \frac{\lambda^3 dy}{(b^2 y^2 + \lambda^2)^{3:2}}$

$= \frac{p^3 dy}{y^3}$ findet. Also ist (206) $\frac{2ch^2 dp}{p^3 dy}$ oder $P =$ $\frac{2ch^2}{y^3}$ und die Kraft verhält sich verkehrt wie der Würfel der Entfernung, und wenn dieses mit dem gewöhnlichen Ausdrucke einer Kraft, die sich verkehrt wie der Würfel der Entfernung verhielte, $\frac{f^3}{y^3}$ (87) übereinstimmen soll, so muß $f^3 = 2ch^2$ seyn, wie in (258. IIII.).

VII. Eine krumme Linie, welche die in der Aufgabe erfoderte Eigenschaft hat, heißt man dieserwegen isochronam paracentricam, oder curuam accessus & recessus aequabilis. Gegenwärtige ist die einzige, welche mit freyer Bewegung beschrieben wird. Leibniz hat zuerst die Frage vorgegeben (Act. Er. Lipſ. 1689. p. 198.) in was für einer vorgezeichneten Linie, wie gleichsam in einem Canale, ein Körper den unsere Schwere treibt, sich bewegen müsse, um sich einem Puncte in gleichen Zeiten gleichviel zu nähern, oder von ihm gleichviel zu entfernen. Dieser Weg hat die erwähnten Nahmen erhalten. Aber diese Untersuchung gehört nicht hieher.

Zwey=

Zweyter Abschnitt
von
Bewegung der Puncte auf vorgeschriebenen Wegen.

1. Erkl. Wenn ein Körper durch äusere Hindernisse nicht so gehen kann, wie er vermöge der bisher betrachteten Kräfte gehen würde, so ist seine Bewegung nicht frey, und wenn die Hindernisse ihm den Weg, den er nehmen muß, vorzeichnen, so wird sich für diese Bewegung der auf dem Titel gebrauchte Nahme am besten schicken. Man sehe I. 172.

2. Zus. Gesetzt, ein Körper sey genöthigt auf der krummen Linie BM 15. F. zu gehen, und befinde sich in M, so daß er zunächst das Element Mm beschreiben muß. Sollte er den Weg BMm frey beschreiben, so würde, wo auch seine Bewegung herrühren mag, nach I; 168. in M eine Normalkraft $= \frac{2v}{r}$ vorhanden seyn. Sie ist des Körpers Schwungkraft entgegengesetzt (I. 167.). Wenn also ein vorgezeichneter Weg den Körper hält, wie in I. 172. erläutert wird, so ist diese Normalkraft nicht nöthig, sondern die ihr gleiche aber entgegengesetzte Schwungkraft, wird durch die Festigkeit des vorgezeichneten Weges aufgehalten, und

der Körper druckt mit dieser Schwungkraft senkrecht auf seinen Weg. Gehört das Element Mm zu einem Kreisbogen, dessen Halbmesser MO = r ist, und soll der Körper Mm mit einer freyen Bewegung beschreiben, so müssen solche Kräfte in ihn wirken, daß er in M mit einer Gewalt $\frac{2v}{r}$ nach MO zu getrieben wird (I. 167.). Ist aber BMm eine feste Röhre, in welcher der Körper gehen muß, so sind dergleichen Kräfte nicht nöthig, aber der Körper wird auf Mm senkrecht, oder nach der Richtung OM mit einer beschleunigenden Kraft $\frac{2v}{r}$ drucken, welche nun die Schwungkraft (vis centrifuga), heissen wird. Ich erinnere mit Fleiß, daß dieses eine beschleunigende Kraft ist (49). Da v und r beydes Linien sind, so ist $\frac{2v}{r}$ eine Zahl, und die beschleunigende Kraft unserer Schwere, ist die dazu gehörige Einheit (I. 85). Wäre also des Körpers Masse = A; welches auch sein Gewicht ausdrückt, so wäre die bewegende Kraft, mit welcher er auf Mm drückte, $\frac{2v}{r}$. A d. i. Mm leidet einen so starken senkrechten Druck, als ob ein Gewicht von der nur angezeigten Grösse (aber ein Gewicht das senkrecht auf Mm drückte) da läge. Also muß die Röhre daselbst so fest seyn, daß sie ein solches Gewicht tragen kann, welches dem Gewichte des Körpers, gleich, grösser, oder kleiner, ist, nachdem 2v, so groß als r, grösser, oder kleiner ist.

3. Zus.

3. Zus. Ist also ein Körper durch einen Stoß etwa in Bewegung gesetzt worden, und wird er genöthiget in einer solchen Röhre zu gehen, ohne daß weiter eine Kraft in ihn wirkt, als der erste Stoß, so druckt er beständig mit der angezeigten Gewalt auf die Röhre. Man setze BM liegt auf einer horizontalen glatten Tafel, und der Körper, welcher auf der hohlen Seite der krummen Linie, bey B liegt, bekömmt da einen Stoß nach der Tangente bey B. So wird, den Wiederstand der Luft beyseite gesetzt, dieß ein Beyspiel des angeführten seyn.

4. Zus. Hier entsteht also Druck, oder Kraft aus Bewegung, daß es also nicht zu entscheiden ist, ob Kräfte der Ursprung der Bewegung, oder Bewegungen der Ursprung der Kräfte sind.

5. Zus. Wirkt in den Körper in M eine Kraft nach OM, so ändert solche die Geschwindigkeit nicht, sondern nur seinen Druck auf Mm. Es sey eine solche Kraft = N so ist der Druck nun $\frac{2v}{r} \pm N$ das obere Zeichen, wenn diese Normalkraft mit dem Schwunge, von dem des Körpers Druck herrührt (2), einerley Richtung, das untere, wenn sie die entgegengesetzte hat. Im letzten Falle wird der Körper in dem vorgezeichneten Wege mit freyer Bewegung gehen, wenn $N = \frac{2v}{r}$, da er nähmlich auf seinen Weg nicht druckt.

6. Zus. Treibt den Körper in M eine Tangentialkraft T, so ist $dv = \pm Tds$ das obere Zeichen, wenn sie die Bewegung beschleunigt, das untere, wenn sie solche hindert. Aus l. 168. Denn die Tangentialkraft strebt nicht des Körpers Weg zu ändern, und also ist es ihr gleichgültig, ob die Bewegung frey ist oder nicht.

7. Zus. Ist noch ein Wiederstand R vorhanden, den man allezeit als eine hindernde Tangentialkraft ansehen kann, so ist $dv = Tds - Rds$.

8. Zus. Wenn ein Körper wie in (3) irgendwo z. E. in B, einen Stoß bekömmt, so wird er sich nach der Röhre Tangente bey B zu bewegen anfangen; wäre gleich der Stoß nicht nach dieser Tangente gerichtet, so würde sich seine Gewalt in zween Theile zerlegen lassen, in einen der bey B senkrecht auf die Röhre, und in einen der nach der Tangente bey B gerichtet wäre. Der erste Theil würde durch der Röhre Festigkeit aufgehoben, und so bliebe nur der andere. Auf diese Art, lange der Körper, ohne daß weiter was in ihn wirkt als der erste Stoß, in M mit der Geschwindigkeit c an. Mit selbiger wird er in dem nächstfolgenden dt, das Stück Mv der Verlängerung des Elements μM. aus dem er kömmt, beschreiben wolle. Weil ihn aber der vorgezeichnete Weg nöthiget nach Mm zu gehen, so wird sich seine Geschwindigkeit in zween Theile zerlegen müssen, deren eine nach MN senkrecht auf Mm, der andere nach Mm gerichtet ist. Nur der letzte wird beybehalten, der erste aber durch die Festigkeit

stigkeit der Röhre vernichtet werden. Es sey vm senkrecht auf Mm, so ist der Theil, welcher bleibt, $\frac{Mm}{Mv}$. c und also der Verlust der Geschwindigkeit $\frac{Mv-Mm}{Mv}$. c. Aber $Mm = r\,(Mv^2 - mv^2) =$ $Mv - \frac{mv^2}{2Mv}$.... Ist nun der Winkel mMv, wie bey krummen Linien ordentlich angenommen wird, unendlich klein, so ist $Mv - Mm = \frac{mv^2}{2Mv}$... unendlich klein von der dritten Ordnung, weil mv in Vergleichung mit Mv unendlich klein ist. Also ist der Verlust der Geschwindigkeit $\frac{mv^2}{2Mv^2}$. c ein unendlich kleines der zweyten Ordnung: das ist die Geschwindigkeit c bleibt ungeändert, weil in zween nächst nacheinander folgenden Zeittheilchen, ihre Veränderung solchergestalt nur unendlich klein von der zweyten Ordnung wäre, welches in unendlich viel solchen Zeittheilchen, oder in einer endlichen Zeit, etwas unendlich kleines von der ersten Ordnung betragen würde, daß sich also die Geschwindigkeit in einer endlichen Zeit, nur unendlich wenig veränderte. Weil mv, Mv, Mm, die Bb, AB, Ab der 8. Fig. sind, so ist aus l. 163; $r = \frac{Mv^2}{mv} = \frac{ds^2}{mv}$ also der Verlust der Geschwindigkeit $\frac{cds^2}{2r^2}$. Allemahl unendlich

endlich

endlich klein von der zweyten Ordnung, wenn der Halbmesser der Krümmung nicht unendlich klein ist.

Ist derselbe unendlich klein, so kann $\frac{ds^2}{r^2}$ endlich seyn, und der Körper leidet plötzlich einen endlichen Verlust seiner Geschwindigkeit. Das kann sich nur da ereignen, wo die krumme Linie eine Spitze hat, und der Körper, indem er gerade auf sie anstiesse, alle Bewegung verlieren müßte. Ist $\frac{ds^2}{2r^2}$ unendlich klein von der ersten Ordnung, so ist der Verlust der Geschwindigkeit von eben der Ordnung. Da aber solche Stellen, wo der Halbmesser der Krümmung unendlich klein ist, nur selten und von einander entlegen sind, so wird auch zwischen ihnen, die Bewegung des Körpers doch nach dem bisher ausgeführten gleichförmig seyn.

9. Aufg. Zu machen, daß ein schwerer Körper in dem vorgeschriebenen Wege BM ohne das Reiben geht, das ihm hinderlich seyn wird, wenn man eine Röhre nach der Gestalt BM krümmen, und ihn darinnen zu gehen nöthigen wollte.

Aufl. QOS sey die Evolute von BM (Un. 563). Man stelle ein Blech, das nach QOS gekrümmt ist, vertical, und befestige daran einen Faden SQM, an dessen Ende M der Körper hängt. Wenn man den Körper der Wirkung der Schwere überläßt, so wickelt er den Faden von QO ab, und beschreibt so BM. Ist A der unterste Punct, und liegt der Faden, wenn er durch A geht, gleich so, daß er eine

andere

andere krumme Linie soq berührt, so wird er sich beym Aufsteigen des Pendels auf dieselbe aufwickeln, und das Pendel wird also in der krummen Linie steigen, die aus der Aufwickelung von soq entsteht, das ist, in der, nur rückwärts gegangen, die aus der Abwickelung von qos entsteht. Sind daher QOS und qos einerley, so wird das Pendel in einen Bogen steigen, der dem Bogen BA gleich und ähnlich ist, und so abwechselnd in gleichen und ähnlichen Bogen steigen und fallen. Nur müssen beyde Bogen bey A eine gemeinschaftliche horizontale Tangente haben. Soll BM ein Kreis seyn, so wird QOS sein Mittelpunct. Man darf den Faden nähmlich nur an einem Puncte befestigen. MO ist der Halbmesser der Krümmung, und wird mit der Kraft gespannt, mit welcher der Körper Mm, wenn es ein Theil einer festen Röhre wäre, drücken würde (2). Ist daher der Faden nicht stark genug, so wird er reissen. Er muß sich aber durch den Schwung nicht länger ausdehnen lassen, sonst würde der Weg des Körpers nicht die Linie werden, die aus der Abwickelung QO entsteht. In der völligen Schärfe müßte der Faden selbst als ein Körper, der mit bewegt wird, betrachtet werden, welches hier, da wir nur von bewegten Puncten reden, nicht angeht. In der Ausübung läßt sich die Masse des Fadens leicht beyseite setzen. Aber auch das Gewicht am Faden, kann nicht, wie hier angenommen wird, ein Punct seyn. Man müßte sich also begnügen, daß es nur einen sehr kleinen Raum einnähme, daher sich ein Kügelchen aus einer schwe-

ren Materie am besten dazu schicken würde. Gerade Linien, oder krumme, die Spitzen oder Wendungspuncte haben, lassen sich durch eine solche Abwickelung nicht beschreiben.

10. Anm. Ich handele in der Folge nur von der Bewegung auf Linien. Die Bewegung auf Flächen zu untersuchen würde mir zu weitläuftig fallen.

Von der Bewegung eines Körpers auf einer gegebenen Linie im leeren Raume.

11. Aufg. Ein Körper bewege sich in der Linie AMB 16. F. von A nach B; Es wirke beständig in ihn eine Kraft nach MF mit der Axe AP parallel. Man sucht die Geschwindigkeit des Körpers in jeder Stelle, die Zeit die er braucht, jeden Theil der krummen Linie zu beschreiben, und den Druck auf jede Stelle.

Aufl. Man setze er habe den Bogen AM beschrieben. In A, M, gehören seine Geschwindigkeiten den Höhen b, v, zu. Es sey AP = x; PM = y; AM = s; die Kraft nach MF sey = p. Man zerlege sie in eine Tangentialkraft $= \frac{MT}{MF} \cdot p = \frac{p\,dx}{ds}$

und eine Normalkraft $= \frac{MN}{MF} \cdot p = \frac{p\,dy}{ds}$. Jene vermindert hier des Körpers Geschwindigkeit. Also ist (6) $dv = -p\,dx$ und $v = Const - \int p\,dx$. Man nehme

nehme $\int p dx$ so daß es für $x = o$ verschwindet, so ist $v = b - \int p dx$, für die Geschwindigkeit.

Und die Zeit ist $t = \int \frac{ds}{r(b - \int p dx)}$ wo die Zeit in Secunden gefunden wird, wenn man in diesen ihrem Werthe, die Längen in Tausendtheilchen des rheinländischen Fusses ausdrückt, und ihn alsdenn mit 250 dividirt (I. 44.).

Der Druck endlich auf die krumme Linie in M ist $= \frac{p dy}{ds} + \frac{2v}{r}$ (5).

12. Zus. Würde ein Körper in A mit der Geschwindigkeit, welche der Höhe b zugehört, aufwärts geworfen, und wirkte in ihn eine, wie man will, veränderliche Kraft p, nach PA, so wäre in P; $dv = -pdx$ (I. 76.) also $v = b - \int pdx$ wie hier. Daß also der Körper gleichviel Geschwindigkeit verliert, er mag sich um die Höhe AP, senkrecht durch AP selbst, oder auf dem Wege AM, was auch solcher für eine Gestalt hat, erheben. Der Verlust seiner Geschwindigkeit kömmt nur auf die Höhe an, auf die er steigt.

13. Zus. Käme der Körper von B herunter, so beschleunigte ihn die Kraft, und es wäre in M, $dv = +pdx$ eben wie in P, wenn er von C nach A fiele.

14. Zus. Es sey AC so groß, daß AC, statt x in $\int pdx$ gesetzt, dieses Integral, so wie in II. verstanden, $= b$ wird. So wird die Geschwindigkeit des

von

von A an steigenden Körpers verschwinden, wenn er durch den krummen Weg AMB, oder durch den geraden AC frey gestiegen ist. Er wird also von B durch BMA oder von C durch CPA aus der Ruhe zurückfallen, und einmahl wie das andere, in A wieder die Geschwindigkeit haben, die er, während des Falles durch CA, wenn immer die veränderliche Kraft p in ihn wirkt, erlangen kann.

15. Zus. Die Zeiten, in denen der Körper durch Mm und durch Pp stiege, verhalten sich wie ds : dx.

16. Zus. Ist also AMB eine gerade Linie, so wird dieses Verhältniß unveränderlich = 1 : cos MAC oder wie die Länge AM zur Höhe AP.

17. Zus. Wenn dx unveränderlich ist, so ist $r = \frac{-ds^3}{dx\,ddy}$ (Un. 543. III.) also diesen Werth, und den von v (11) in den Ausdruck der Schwungkraft (2) gesetzt, kömmt der völlige Druck (aus 11)

$$\frac{pds^2\,dy - 2.\,(b - \int p\,dx)\,dx\,ddy}{ds^3}.$$

18. Anm. Die Dinge, welche in dieser Frage vorkommen, sind: Eine krumme Linie, Kraft, Zeit, Geschwindigkeit und Druck. Wie hier aus den ersten beyden die letzten drey sind gefunden worden, so lassen sich aus jeden zweyen dieser fünf, die drey übrigen finden, welches zehn Aufgaben gibt, deren Auflösung sich aus gegenwärtiger herleiten lassen.

19. Aufg. Ein Körper, den eine unveränderliche Kraft parallel mit AP 17. F. treibt, falle auf AM, aus der Ruhe von A. Man sucht seine Geschwin-

schwindigkeit in M, die Zeit durch AM, und den Druck auf M.

Aufl. Es sey AP=x, PM=y, AM=s; die Kraft die in (11) p hiesse, hier =g. Aus dem Verfahren in 11. erhellt, daß hier die Tangentialkraft beschleunigt, folglich $dv = +gdx$ und $v = gx$ weil die Geschwindigkeit in A=o. Wegen des Krümmungskreises, stelle man sich in einer willkührlichen, bestimmten Entfernung von AP, eine andere Axe BQ mit AP parallel gezogen vor, der PM verlängert in Q begegne: So wäre wie in (17) $r = \frac{-dBM^3}{dBQ.ddQM}$. Weil AMB; PMQ, unveränderlich sind, und hier AP wächst, wenn BQ abnimmt, so ist ds=-dBM; dx=-dBQ; dy=-dQM also $ddy = -ddQM$ und $r = \frac{+ds^3}{dx\,ddy}$, und die Schwungkraft, statt v den Werth davon gesetzt, $\frac{2gxdxddy}{ds^3}$, dazu $\frac{gdy}{ds}$ addirt, den völligen Druck giebt.

Die Zeit ist $\int \frac{ds}{r\sqrt{gx}}$ (11).

20. Zus. Die Geschwindigkeit verhält sich bey einerley Kraft, wie die Quadratwurzel aus AP, der Höhe des Falles, daß also hier die Gestalt des Weges gar keinen Einfluß hat.

21. I. Exempel. AM 18. F. sey eine gerade Linie, deren Winkel PAM mit der Verticallinie AP zum

Cosinus n habe, so ist $x = ns$, die Zeit durch AM also $= \int \frac{ds}{r\,gns} = 2r\frac{s}{gn} = \frac{2AM}{r\,g.\,AP}$. Weil $r = \infty$, verschwindet die Schwungkraft, (es ist nähmlich auch $ddy = o$, weil dy und dx beyde unveränderlich sind) und der Druck ist $\frac{g\,dy}{ds} = gr(1 - n^2) = \frac{g.PM}{AM}$.

21. Zus. Die Zeit des senkrechten Falles durch AP wäre $2r\frac{x}{g}$ (I. 80.) also ist aus 20;

Zeit d. AP : Zeit d. AM = AP : AM;
Zeit d. AM : Zeit d. AK = rAM : rAK

Zeit d. AP : Zeit d. AK = AP : rAM. AK

Sollen also beyde Zeiten gleich seyn, so ist AM : AP = AP : AK oder wenn PK auf AM senkrecht ist, so geht ein Körper auf dem schiefen Wege AK in eben der Zeit herab, in der er gerade durch AP fiele.

Wenn g die Schwere ist, so erläutert dieses den Fall der Körper auf schiefen Ebenen (Stat. 95.).

22. Zus. Die Zeit da ein Körper aus der Ruhe durch KP ginge, wäre wie in 21; $2r\frac{PK}{g.\cos APK}$;

Aber $\cos APK = \frac{PK}{AP}$ also wäre diese Zeit $= 2r\frac{AP}{g}$,

oder

oder der Körper geht in eben der Zeit durch PK, in der er durch AP fiele.

23. Zus. Ein Kreis, der AP zum Halbmesser hätte, würde wegen des rechten Winkels AKP, durch K gehen. Also kämen Körper durch die Sehnen AK, KP dieses Kreises in eben der Zeit, in der einer durch seinen Durchmesser AP senkrecht fiele. Und weil es hier blos auf den rechten Winkel bey K ankömmt, so erhellt, daß 19. F. alle Sehnen AK, A_2K, A_3K u. s. w. aus dem obersten Puncte A, auch KP, $_2$KP, $_3$KP, u. s. w. aus dem untersten B in einerley Zeit, nähmlich in der Zeit des Falls durch den lothrechten Durchmesser AP beschrieben werden.

24. II. Ex. Hier ist die natürliche Stelle der Sätze von der Schwungkraft, die Hungens zuerst ohne Beweise bekannt gemacht hat. Keil introd. ad phys. ver. ed. Leid. 1725. p. 196. hat Beweise von ihnen gegeben. Dergleichen sich auch in Hungens Schrift de vi centrifuga in s. oper. posthum. finden. Ich will die Sätze nach Hungens Ordnung beybringen.

Bey den ersten Sätzen, bis was anders erinnert wird, stelle man sich einen Faden, an dem ein kleiner Körper befestigt ist, auf einer glatten horizontalen Tafel mit dem andern Ende angebunden, vor. Man spanne den Faden gerade aus, und gebe nun dem Körper einen Stoß, senkrecht auf die Länge des Fadens. So wird der Körper anfangen einen Kreis zu beschreiben, dessen Halbmesser des

Fadens Länge ist, und den Faden mit der Schwungkraft dehnen. Da weiter keine Kraft in ihn wirkt, wird die Bewegung gleichförmig seyn.

I. Satz. In einem Kreise sey der Halbmesser r, die der Geschwindigkeit zugehörige Höhe = c, die Schwungkraft p, und R, C, P, sind eben das für einen anderen Kreis. So ist $p = \frac{2c}{r}$, $P = \frac{2C}{R}$ (2).

Wenn also $r C : r c = R : r$ so ist $\frac{C}{R} : \frac{c}{r}$ oder $P : p = R : r$. Die Schwungkräfte verhalten sich wie die Halbmesser, wenn sich die Geschwindigkeiten so verhalten.

II. Satz. Für $R = r$ ist $P : p = C : c$ die Kräfte bey gleichen Kreisen, wie der Geschwindigkeiten Quadrate.

III. Satz. Wenn $C = c$ so ist $P : p = r : R$. Bey gleichen Geschwindigkeiten sind die Schwungkräfte verkehrt wie die Halbmesser.

IIII. Satz. Wenn die Zeiten, in denen beyde Kreise beschrieben werden, T, t, heissen, so ist wegen der gleichförmigen Bewegung, und da sich die wirklichen Räume, die Umkreise, wie die Halbmesser verhalten; $t : T = \frac{r}{r c} : \frac{R}{r C}$ (I. 12). Aber $c : C = r.p : R.P$ (I. Satz) also $t : T = r\frac{r}{p} : r\frac{R}{P}$ folglich, wenn $p = P$, $t : T = r r : r R$. Bey gleichen

gleichen Kräften verhalten sich die Zeiten wie die Quadratwurzeln aus den Halbmessern.

V. Satz. Soll die Kraft des Schwunges der Schwere gleich seyn, so ist $2c = r$ (2), oder der Körper muß eine so grosse Geschwindigkeit haben, als er erlangen könnte, wenn er durch den Halbmesser herabfiele. Unter den Umständen, die ich vor diesen Sätzen erklärt habe, würde der Körper den Faden eben so stark durch den Schwung spannen, als wenn er an einem gleichen Faden, lothrecht herabhinge.

VI. Satz. Aufg. In einem wagrechten Kreise, wie bisher angenommen worden, kömmt der Körper, vermittelst des ihm gegebenen Stosses, in einer gegebenen Zeit $= t$ herum, und spannt den Faden so stark, als er daran ruhig herabhängend, durch sein Gewicht thun würde. Wie groß ist des Kreises Halbmesser?

Aufl. Des Kreises Umfang ist $2r\pi$ wenn $1 : \pi$ die Verhältniß des Durchmessers zum Umkreise ist. Da nun dieses der mit gleichförmiger Bewegung beschriebene Raum ist, so ist m aus I. 77. verstanden, $\frac{m.\,2\,r\,\pi}{r\,c} = t$. Nun soll $2c = r$ seyn (V. S.), also

ist $m\pi.\,2\,r\,2r = t$ woraus $r = \frac{t^2}{8m^2\pi^2}$ folgt. Ist t in Secunden ausgedruckt, und S der Fall in einer Secunde, also $m = \frac{1}{2\,r\,S}$ so wird $r = \frac{S.\,t^2}{2\pi^2}$.

Huygens VI. S. ist hievon nur ein besonderer Fall nähmlich für t = 1 Secunde; Wenn man S aus l. 36. und l. 77. $\frac{1}{\pi}$ aus Geom. 44. S. 5. Z. nimmt, da sich der ersten Zifern Quadrat leicht vermöge der Quadrattafeln macht, so ist 2r = 1,5827 rheinl. Fuß, für t = 1 Sec.

VII. Satz. AM 16. F. ist eine krumme Linie, die um ihre lothrecht stehende Axe AP ein Sphäroid beschreibt, dessen horizontale Durchschnitte also Kreise sind, welche die Ordinaten PM zu Halbmessern haben. Man legt einen schweren Körper, auf eine willkührliche Stelle des Sphäroids M, und giebt ihm einen Stoß, vermöge dessen er einen solchen horizontalen Kreis zu beschreiben anfängt. Die Frage ist, wie groß die Geschwindigkeit seyn muß, damit er von der Schwere nicht niedergezogen wird, sondern in dem Kreise fortgeht.

Aufl. Die Geschwindigkeit gehöre der Höhe c zu; Es sey AP = x; PM = y; OM die Normallinie. Der Schwung treibt den Körper nach MQ mit einer Kraft = $\frac{2c}{y}$; die Schwere treibt ihn nach MS mit der Kraft = 1; Man setze MQ, MS, verhalten sich wie diese beyden Kräfte. Soll der Körper in M, und so in jedem Puncte des Kreises mit PM, weder sinken noch steigen, so muß aus diesen beyden Kräften eine zusammengesetzte entstehen, die ihn senkrecht auf das Element der krummen Linie bey M andrückt, also davon völlig aufgehoben wird; diese Kraft MN also, muß auf der

Nor=

Normallinie OM Verlängerung fallen. Weil nun $MS = 2N$ und $QN : MQ = PO : MP$, so ist $1 : \frac{2c}{y} = \frac{y\,dy}{dx} : y$ oder $dx = \frac{2c\,dy}{y}$. Wäre also die krumme Linie gegeben, so könnte man c wie es erfodert wird, aus der Gleichung $\frac{y\,dx}{2\,dy} = c$ finden.

Ex. Wäre das Sphäroid ein Kegel, der auf seiner Spitze stünde, also AM eine gerade Linie und $y = nx$ so käme $c = \frac{1}{2}x$.

Ist die krumme Linie nicht gegeben, aber c eine Function von y, so läßt sie sich aus $dx = \frac{2c\,dy}{y}$ durch die Integration finden.

Verhielte sich die Geschwindigkeit, wie die Ordinate, oder wäre $c = \frac{y^2}{b}$ so käme $dx = \frac{2y\,dy}{b}$ und die Integration so verrichtet, daß x und y zugleich verschwinden, $bx = y^2$, für eine Parabel.

Von diesen allgemeinen Betrachtungen, enthält Huygens VII. Satz nur einen besondern Fall. Er verlangt nähmlich, daß der Körper einerley Zeit brauchen soll, um das ganze Sphäroid herum zu kommen, wo auch M genommen wird. Folglich ist t eine beständige Grösse, und aus $\frac{2m\pi r}{rc} = t$ in VI. S. wird hier, y statt r gesetzt, $c = \frac{4m^2\pi^2y^2}{t^2}$.

Also, das unmittelbar vorhin gebrauchte $b = \frac{t^2}{4m^2\pi^2}$ und die krumme Linie eine Parabel deren Parameter $\frac{t^2}{4m^2\pi^2}$.

Auf einen solchen Paraboliſchen Sphäroid also, kömmt ein Körper allemahl in einer Zeit herum, wo man ihn auch hinlegt. Hungens Vergleichung des Parameters, mit der Länge eines Penduls ſ. unten 50.

VIII. Satz. Ein Faden ist in A 18. F. befestigt, und hat an seinem andern Ende ein schweres Körperchen, AP sey lothrecht. Man bringt ihn in die schiefe Lage AM und giebt dem Körper einen Stoß, senkrecht auf die lothrechte Ebene PAM, vermöge dessen er einen Kreis dessen Ebene auf AP senkrecht steht, und der P zum Mittelpuncte hat, zu beschreiben anfängt; so wie AM die Fläche eines senkrechten Kegels zu beschreiben anfängt, dessen Axe $=$ AP wäre. Man fragt wie groß die der Geschwindigkeit zugehörige Höhe, c, seyn muß, damit er diesen Kreis zu beschreiben fortsetzt, und so der völlige Kegel beschrieben wird.

Aufl. Der Körper wird in M von der Schwungkraft $\frac{2c}{PM}$, nach MN, und von der Schwere $= 1$ nach MO getrieben. Man setze die Linien MN, MO, verhalten sich wie beyde Kräfte. Soll ein Kegel beschrieben werden, so muß sich der Winkel PAM,

PAM, durch beyder Kräfte Wirkungen, nicht ändern: Also muß aus beyden, eine Kraft nach MN, der Verlängerung von AM entstehen, die also durch die Festigkeit des Fadens, völlig aufgehoben wird. Also muß MN : MO oder MN : NH = MP : AP seyn, oder es ist $\frac{2c}{PM} : 1 = PM : AP$ folglich $c = \frac{PM^2}{2.AP}$. Es sey $PM = r$, $AP = a$ also $c = \frac{r^2}{2a}$; so wird aus dem VI. §. $t = 2m\pi\sqrt{\frac{r}{2a}}$, daß also alle solche Kegel in gleichen Zeiten beschrieben werden, wenn sie einerley Höhen haben. Soll die Schwungkraft der Schwere gleich seyn, so ist $\frac{2c}{r} = 1$ also $r = a$, und $PAM = AMP = 45°$.

Anm. Wenn die Geschwindigkeit, welche der Stoß dem Körper giebt, kleiner ist, als die so der Höhe $\frac{2r^2}{a}$ zugehört, so beschreibt der Körper keinen Kreis, sondern eine elliptische Figur, die eigentlich nicht in einer einzigen Ebene liegt. Joh. Bernoulli hat dieses zuerst erinnert, und braucht es die Verrückung der Axen der Planetenbahnen dadurch sinnlich abzubilden, denn die Axe dieser Ellipse verrückt sich Nouv. Pens. sur le Sist. de Descartes §. 48. Op. T. III. n. 138. Vollständiger untersucht dieses Euler Mech. L. II. §. 896.

VIIII. Satz. Der Winkel AMP heisse β, und $AM = e$ so ist $a = e. \sin\beta$, auch $t = 2m\pi\sqrt{(2e. \sin\beta)}$ oder bey Kegeln, die einerley Winkel an der Spitze machen, verhalten sich der Zeiten Quadrate, wie der Fäden Längen e.

X. Satz. Und allemahl wie die Höhen (VIII. S.).

XI. Satz. Und bey einerley Länge des Fadens, wie die Sinus der Winkel, welche der Faden mit dem Horizonte macht, oder der Cosinus des Winkels an der Spitze.

XII. Satz. Die Zeit des Falles durch 2. a, des Kegels doppelte Höhe, ist $2m\sqrt{2a}$ (I. 80.). Also verhält sich t zu ihr $= \pi : 1$ (VIIII. S.).

Dieses wird also auch noch gelten, wenn der Faden nur sehr wenig aus der lothrechten Lage erhoben ist, und also einen sehr spitzigen Kegel beschreibt, dessen Grundfläche ein sehr kleiner Kreis ist. Dieß nennt Huygens circuitus minimos facere, und redet an gegenwärtigem Orte nur davon.

Alsdenn können Höhe und Länge des Pendels, AM und AP, für gleich angenommen werden.

XIII. Satz. Wird ein sehr spitziger Kegel, wie in XII. S. beschrieben, so ist beynahe $a = e$ oder $\sin \beta = 1$ also die Zeit in welcher er beschrieben wird $= 2m\pi\sqrt{2e}$ so groß als die Zeit, in welcher im VI. S. ein Kreis beschrieben wird, dessen Halbmesser des Pendels Länge e gleichet, wofern in diesem Kreise die Schwungkraft der Schwere gleich ist.

XIIII. Satz. Durch eine Höhe, welche der Länge des Fadens gleich ist, fällt ein Körper in der Zeit $2m\sqrt{e}$ (I. 80). Soll die Zeit dieses Falles so groß seyn, als die Zeit des Umlaufs im VIIII. S. so erhält man $1 = \pi^2 . 2 \sin \beta$; also verhält sich $\sin \beta : 1 = \frac{1}{2} : \pi^2$ das ist, wie das im Kreise beschrie-

bene

bene Quadrat, zu dem Quadrate von des Kreises Umfange. (Jenes Quadrat nähmlich hat zur Seite $\frac{1}{r_2}$ wenn der Durchmesser wie hier $=1$).

Man würde also sin β beynahe berechnen, wenn man $\frac{1}{\pi}$ aus Geom. 44. S. 5. Zus. nähme. Huygen giebt diesen Winkel $=2^\circ\ 54'$ an.

XV. Satz. Die Kraft zu finden, mit welcher der Faden AM 18. F. gespannt wird.

Aufl. Diese Kraft verhält sich zur Schwere wie MH:MO oder wie AM:AP, und ist also $\frac{e}{a}$.

Huygens 15. Satz lehrt nur, daß sich die Spannung, wenn verschiedene Kegel von einerley Höhe beschrieben werden, wie die Länge der Fäden verhält, d. i. wie e bey einerley a.

XVI. Satz. In C 21. Fig. sey das Ende eines Fadens $CA=r$ befestiget, an dessen anderem Ende sich ein schwerer Körper befinde. Man hebe den Faden ausgespannt in die wagrechte Lage CA, so wird das Gewicht bey A anfangen, den Bogen AM, eines lothrechten Kreises ABDE zu beschreiben. Man fragt, wie stark dieser Kreis in jeder Stelle M gedrucket, das ist der Faden nach CM gespannt wird.

Aufl. Aus 19. ist hier der Druck $\frac{2v}{r}+\frac{gdy}{ds}$. Aber $CQ^2+(PQ-PM)^2=CM^2$ das ist in den Bedeutungen

tungen

tungen von 19; $x^2 + (r-y)^2 - r^2$ folglich $x^2 + y^2 = 2ry$, und $ds = \frac{r\,dy}{x}$; also der Druck $= \frac{2x}{r} + \frac{x}{r} = \frac{3x}{r}$.

In B ist er 3. dreymahl der Schwere gleich. Der Faden wird da so stark gezogen, als wenn das dreyfache Gewicht ruhig in B herabhinge.

Brächte man den Faden in die Lage CM, und liesse indem los, so wäre in B die Schwungkraft $\frac{2BQ}{r}$ weil der Körper da die Geschwindigkeit hätte, die ihm der Fall durch QB gäbe. Der Faden würde also in B von dieser Schwungkraft, und von der Schwere gespannt werden, oder seine Spannung verhielte sich zum Gewichte des Körpers wie $\frac{2BQ}{r} + 1 : 1$.

Wäre $BM = 60°$ so wäre $CQ = \frac{1}{2}r = BQ$ also die Spannung noch einmahl so stark als das Gewicht.

XVII. Satz. Ein Körper soll sich durch den ganzen lothrechten Kreis ABDEA schwingen. Wie stark wird er den Faden in B spannen?

Aufl. Es erhellt, daß zu dieser Absicht nöthig ist, dem Körper in A noch einen Stoß nach der Tangente bey A zu geben, denn liesse man ihn wie im XVII. S. blos fallen, so hätte er in B die Geschwindigkeit, die durch einen Fall von der Höhe CQ erhalten wird (20), und die würde er wieder verlieren, wenn er von B durch BD eben so hoch

wieder

wieder stiege (14). Der Stoß muß also wenigstens so starck seyn, daß der Körper aus B bis E steigen, und daselbst den Faden mit einer Gewalt, die seinem Gewichte gleich ist, spannen kann. Eine stärkere Gewalt schadet nicht, wofern nur der Faden sich nicht dehnen läßt, da er sonst seine Länge verändern würde: Aber schwächer darf die Gewalt nicht seyn, sonst würde der Schwung den Körper nicht hindern nach EC zurückzufallen. Wenn also v die Geschwindigkeit in E heißt, so muß wenigstens $\frac{2v}{r} = 1$ das ist $v = \frac{1}{2} r$ seyn, oder der Körper muß in E wenigstens die Geschwindigkeit haben, die der Höhe $\frac{1}{2} r$ zugehört. Nun verliert er, während des Steigens durch BDE soviel Geschwindigkeit, als der Höhe 2r zugehört. Also muß seine Geschwindigkeit in B wenigstens der Höhe $\frac{5}{2} r$ zugehören, und daher ist seine Schwungkraft 5 mahl so groß als die Schwere. Nun spannt er in B den Faden nach CB erstlich mit dieser Schwungkraft durch seine Masse multiplicirt (2), und denn mit seinem Gewichte, weil die Schwere da von B senkrecht herabdrückt, also mit einer Gewalt, die seinem sechsfachen Gewichte gleich ist. Ist der Faden zu schwach soviel zu tragen, so wird er reissen, an statt daß sich der Körper an ihm ganz herumschwingen soll.

Man setze der Faden soll nach CA gespannt werden, und so der Körper ohne sonst einigen Stoß, nur vermöge seiner Schwere fallen. Nun wollte

man

man in F einen Nagel einschlagen, dergestalt, daß wenn der Faden in die Lage CB kömmt, der Körpee an statt durch BD zu steigen, einen Kreiß um F mit der Länge des Stricks des Fadens FB = FG beschreiben müsste, indem sich der Faden um den Nagel schlänge. Man sucht F.

Der Körper verliert, indem er sich um die Höhe BG erhebet, so viel Geschwindigkeit als dieser Höhe zugehört, was er auch, sich so hoch zu erheben, für einen Weg nimmt; Er hatte aber in B die Geschwindigkeit, die er durch den Fall von der Höhe r erhält. Also gehört seine Geschwindigkeit in G, der Höhe $r - 2BF$, und seine Schwungkraft daselbst ist $\frac{2r - 4BF}{BF}$. Soll dieselbe der Schwere gleich seyn, damit er nicht nach GF zurücke fällt, so ist $2r - 4BF = BF$ oder $BF = \frac{2}{5}r$. Grösser darf BF nicht seyn, aber wohl kleiner.

So weit Hungens Sätze. Ich habe sie hier analytisch vortragen wollen, da sie viel scharfsinnige Anwendungen der bisherigen Lehren veranlassen. Erweiterungen dieser Untersuchungen, dergleichen z. E. Joh. Bernoulli Act. Er. Lipf. Iun. 1715. Op. T. II. n. 97. geliefert, gehören nicht hieher.

Von der Schwungbewegung.

25. Erkl. MAN 19. Fig. sey eine krumme Linie, deren Ebene lothrecht steht, und AO sey in dieser Ebene lothrecht, durch der krummen Linie niedrigste

ste Stelle. Es wirke eine unveränderliche Kraft, mit OA parallel, und in M werde ein Körper gelegt, ohne daß man ihm weiter einen Stoß gebe. Die Kraft wird machen, daß er durch MA herabgeht, und weil er in A die Geschwindigkeit hat, die bey der Wirkung dieser Kraft durch einen Fall von der Höhe PA erlangt wird, so wird er mit dieser Geschwindigkeit wieder zu steigen anfangen, und durch AN wieder auf eben die Höhe gelangen. In N ist seine Geschwindigkeit durch die beständigen Gegenwirkungen der Kraft vernichtet, also sinket er wieder durch NA zurück, hat in A wieder die vorige Geschwindigkeit erhalten, und steigt damit wieder durch AM; und so wird er, wenn sonst nichts in ihn wirkt als die Kraft, immer wechselsweise durch MA, NA fallen, durch AN, AM, steigen. Dieses heißt die **Schwungbewegung**, motus oscillatorius.

Die Kraft heisse g, so gehört die Geschwindigkeit in A, der Höhe g. AP zu (I. 78.), oder wenn die Kraft g wirkt, so gibt ein Fall durch die Höhe AP eben die Geschwindigkeit, als bey der Wirkung unserer Schwere ein Fall durch die Höhe g. AP. Dieß ist zu Erläuterung dessen nöthig was in der Erklärung von der Geschwindigkeit in A gesagt wird.

26. Zus. Das Fallen geschieht allemahl durch den Bogen der krummen Linie, durch welchen das nächstvorhergehende Steigen geschehen war, und umgekehrt. Wäre der Körper durch BEMA gefallen,

und

und durch ANFD gestiegen, (man sieht leicht, welche Puncte gleich hoch angenommen werden) so fiele er nun wieder durch DFNA. Während des Steigens durch FD, hat er so viel Geschwindigkeit verlohren, als ihm die Kraft nehmen konnte, indem er sich um GC erhob, und während des Fallens durch DF, gewinnt er wieder so viel Geschwindigkeit, als ihm die Kraft geben kann, indem sie ihn nach CG senkt. Also hat er in einerley Puncte F allemahl einerley Geschwindigkeit, und beschreibt folglich beym Steigen das von F aufwärts gehende Element, und beym Fallen das gleiche, von F niederwärts gehende in gleichen Zeiten. Daher bringt er gleich lange Zeit über dem Steigen durch AD und dem Falle durch DA zu.

27. Zus. Sind die Bogen AB, AD, gleich und ähnlich, so steigt der Körper, nachdem er durch DA gefallen ist, durch AB eben so, wie er durch AD steigen würde, und also braucht er da zum Fallen und Steigen in jedem Bogen, immer gleiche Zeiten. Sind aber diese beyden Bogen nicht gleich und ähnlich, so wird nur die Zeit des Ganges durch BAD, der Zeit des Rückganges durch DAB gleich.

28. Erkl. Ein Hingang durch BAD, und ein Rückgang durch DAB zusammen, heissen ein Schwung (oscillatio).

29. Zus. Wäre auch BAM nicht eine zusammenhängende einzige krumme Linie, so liesse sich doch diese Bewegung bewerkstelligen, wenn AD und BA, zweene Bogen verschiedener krümmer Linien, bey

A eine gemeinschaftliche wagrechte Tangente hätten. Daher braucht man nur die Bewegung durch einen Bogen BA zu untersuchen.

30. Lehnsatz. $\frac{x^n dx}{r(bx-x^2)}$ zu integriren, wo n eine ganze bejahte Zahl ist.

Aufl. Man setze $r(bx-x^2)=u$ also $\frac{b-2x}{2u}$.

$dx=du$. Ferner $\int\frac{x^n dx}{u}=mb^n\int\frac{dx}{u}+uz$ also

$$\frac{x^n dx}{u}=\frac{mb^n dx}{u}+udz+zdu \text{ oder } (2x^n-2mb^n)$$

$dx=2u^2\,dz+z.\,(b-2x)\,dx$. Nun nehme man

$z=A+Bx+Cx^2\ldots+Gx^h+Hx^{h+1}\ldots Nx^n$

so findet man

$$z.\,(b-2x)=\left.\begin{matrix}Ab\\-2A\end{matrix}\right\}+\left.\begin{matrix}Bb\\-2B\end{matrix}\right\}x+\left.\begin{matrix}bC\\\end{matrix}\right\}x^2\ldots$$

$$\ldots+\left.\begin{matrix}bH\\-2G\end{matrix}\right\}x^{h+1}\ldots+\left.\begin{matrix}bN\\-2M\end{matrix}\right\}x^n\ldots$$

$$\frac{2u^2\,dz}{dx}=2Bbx+\left.\begin{matrix}4bC\\-2B\end{matrix}\right\}x^2\ldots$$

$$+\left.\begin{matrix}2(h+1).bH\\-2hG\end{matrix}\right\}x^{h+1}\ldots+\left.\begin{matrix}2k.bN\\-2(k-1)M\end{matrix}\right\}x^n$$

Diese beyden Reihen zusammen sollen $2x^n - 2mb^n$ ausmachen. Also ist $A = -2mb^{n-1}$, und $(2k+1)$ $bN - 2kM = 2$ also $N = \frac{(1+nM).2}{(2n+1)b}$. So werden A und N aus den beyden Coefficienten bestimmt, die mit den Gliedern linker Hand einerley Potenzen von x zugehören. Uebrigens muß jeder Coefficient der Summe der beyden Reihen, $= o$ seyn, also ist $B = \frac{2A}{3b}$, $C = \frac{4B}{5b}$, ... $H = \frac{2.(h+1).G}{(2h+3)b}$. Ist also einer von den Coefficienten der Reihe z, $= o$ so ist es auch der nächstfolgende, und die Reihe bricht ab.

Man setze also $N = o$, so wird die Reihe $z = A + Bx ... + Mx^{n-1}$. Nun ist jeder Coefficient, der Reihe z, der vorige mit einem Bruche multiplicirt, dessen Zähler das doppelte des Exponenten ist, welcher in der Reihe z, diesem Coefficienten zugehört, und der Nenner um eins grösser ist. Ist also der zweyte Coefficient, oder der zum Exponenten 1 gehört, $\frac{2}{3}Ab^{-1}$ so wird der dritte $\frac{4}{5}.\frac{2}{3}.Ab^{-2}$ der vierte $\frac{5}{7}.\frac{4}{5}.\frac{2}{3}.Ab^{-3}$, und so, den Werth von A statt seiner gesetzt, der h + 2te, welcher zum Exponenten h + 1 gehört

$$\frac{2.(h+1).2h.2(h-1)...6.4.2}{(2h+3).(2h+1).(2h-1)...7.5.3}.-2mb^{n-2-h}$$

Nun soll $N = o$ seyn, also $nM = -1$; wenn man nun aus dem nur gefundenen allgemeinen Ausdrucke des

des Coefficienten, den für M zu machen, $h+1 = n-1$ sezt, und den Werth von M der sich hieraus giebt $= -\frac{1}{11}$ sezt, so kömmt

$$m = \frac{(2n-1).(2n-3).(2n-5)\ldots 5.3.1}{2n.\ (2n-2).(2n-4)\ldots 6.4.2}$$ und so ist das Integral durch einen summatorischen Theil und eine endliche Reihe gegeben.

Wenn eines Kreises Durchmesser $= b$; Abscisse vom Scheitel $= x$ so ist die Ordinate $u = r(bx - x^2)$ und $r(du^2 + dx^2) = \frac{b\,dx}{2u}$; Also ein Bogen dessen Quersinus x für den Halbmesser $\frac{1}{2}$ b wäre $= \int \frac{b\,dx}{2u}$. Dieses Bogens Sinus für eben den Halbmesser wäre u; und des ähnlichen Bogens Sinus, der 1 zum Halbmesser hätte, wäre $\frac{2u}{b}$;

Also ist $\frac{1}{2}b.\mathfrak{B}\sin\frac{2u}{b} = \frac{b}{2}\int\frac{dx}{u}$. Das Integral so verstanden, daß es für $x = o$ verschwindet. Also ist des nur gefundenen Integrals summatorischer Theil $= mb^n.\mathfrak{B}\sin\frac{2u}{b}$. Für $x = b$ wird daraus $mb^n.\pi$ wenn $1:\pi$ die Verhältniß des Durchmessers zum Umkreise, also π der halbe Umkreis für den Halbmesser $= 1$ ist. Welches also das gefundene Integral für $x = b$ ist, weil alsdenn $u = o$, und die endliche Reihe uz also wegfällt.

31. Zus. Es bedeute $\varkappa$ eine ganze bejahte Zahl.

Weil $x^{\varkappa}\,r\,(bx-x^2)\,dx = \frac{x^{\varkappa}\,(bx-x^2)\,dx}{r\,(bx-x^2)} =$

$\frac{bx^{\varkappa+1}.\,dx}{r\,(bx-x^2)} - \frac{x^{\varkappa+2}.\,dx}{r\,(bx-x^2)}$ so läßt sich dieses Differential durch eine doppelte Anwendung des Lehnsatzes integriren. Wenn nähmlich u hier eben das bedeutet, was es im Lehnsatze anzeigte, so setze man zuerst das dortige $n = \varkappa + 1$ so wird das dortige m, welches hier nun μ heissen soll

$\mu = \frac{(2\varkappa+1).(2\varkappa-1)\ldots.5.3.1}{(2\varkappa+2).\ 2\varkappa\ldots\ldots.6.4.2}$; daraus finden sich die dortigen Grössen A, B,... und die dortige Reihe z, die hier ζ heissen soll, und es ist $\int \frac{bx^{\varkappa+1}\,dx}{u}$

$= \mu\, b^{\varkappa+2}.\,\mathfrak{B} \sin\frac{2u}{b} + b\,u.\,\zeta.$

Nun setze man im Lehnsatze auch $n = \varkappa + 2$, so wird das dortige m das nun λ heissen soll

$\lambda = \frac{(2\varkappa+3).(2\varkappa+1)\ldots.5.3.1}{(2\varkappa+4).(2\varkappa+2)\ldots.6.4.2}$ Daraus geben sich wiederum die diesem Werthe von n zugehörigen Coefficienten A, B,... und die Reihe z, die für diesen Fall η heissen soll, und es ist $\int \frac{x^{\varkappa+2}\,dx}{u} = \lambda.$

$b^{\varkappa+2}.\,\mathfrak{B} \sin\frac{2u}{b} + u.\,\eta.$ Folglich das ganze Integral

gral $\int x^n . u . dx (\mu - \lambda) . b^{x+2} . \mathfrak{B} \sin \frac{2u}{b} + (b\zeta - \varkappa) . u$, das für $x = o$ verschwindet.

32. Lehns. Den Werth von $\int \frac{dx}{r[(b-x).(2ax-x^2)]}$ zu finden, wenn $x = b$; und das Integral für $x = o$ verschwindet.

Aufl. Dieses Differential ist $\frac{dx}{r(bx-x^2)}$.

$\frac{1}{r(2a-x)}$ Man setze $2a = c$, und drucke den letzten Factor durch eine unendliche Reihe aus. Oder weil dieser Factor $= \frac{1}{r c . r(1-\frac{x}{c})}$ so suche man nur die unendliche Reihe für $(1-\frac{x}{c})^{-\frac{1}{2}}$. Aus An. 50. wird sie $1 + \frac{1}{2} . \frac{x}{c} \ldots$ um ein allgemeines Glied von ihr zu finden, überlege man, daß der Coefficient zu der Potenz n, so aussehen wird

$$\frac{-\frac{1}{2} . -\frac{3}{2} . -\frac{5}{2} . - \ldots - \frac{2n-1}{2}}{1 . 2 . 3 . \ldots n}$$

. (An. endl. 141. vermöge der An. Un. 46. erwiesenen Allgemeinheit der Binomialformel). Nachdem nun n gerade oder ungerade ist, so sind zugleich dieser Coefficient, und

die zugehörige Potenz von $\frac{x}{c}$, bejaht oder verneint, und also ist der Reihe unbestimmtes Glied allemahl bejaht, oder $+\frac{1.3.5.....(2n-1)}{2.4.6.....2n}.\left(\frac{x}{c}\right)^n$

Das vorgegebene Differential verwandelt sich also in folgendes Product $\frac{dx}{r(bx-x^2)}.\frac{1}{r c}.(1+\frac{1}{2}.\frac{x}{c}.....+\frac{1.3.5....(2n-1)}{2.4.6....2n}.\left(\frac{x}{c}\right)^n...)$.

Das Integral hievon wäre überhaupt (30) $\frac{1}{r c}.$ $(\mathfrak{B}\sin\frac{2u}{b}+\frac{1}{2c}.\int\frac{x.dx}{u}....\frac{+1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...2n}.\frac{1}{c^n}\int\frac{x^n dx}{u}...$ Dieses Integral so genommen, daß es für $x=o$ verschwindet, und alsdenn darinnen $x=b$ gesetzt, giebt für den ersten Theil der unendlichen Reihe π, jeder der folgenden wird $mb^n\pi.\frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...2n}.\frac{1}{c^n}$ (31) das ist $\left(\frac{1.3.5....(2n-1)}{2.4.6....2n}\right)^2.\left(\frac{b}{c}\right)^n\pi$. Also das Integral $\frac{1}{r c}.\pi.(1+(\frac{1}{2})^2.\frac{b}{c}+(\frac{3}{8})^2.(\frac{b}{c})^2+(\frac{5}{16})^2.(\frac{b}{c})^3...$ $+\left(\frac{1.3.5....(2n-1)}{2.4.6....2n}\right)^2.\left(\frac{b}{c}\right)^n...)$

Der

Der Coefficient bey jeder Potenz von $\frac{b}{c}$ ist das Quadrat des zugehörigen Binomialcoefficienten von $(1+\frac{b}{c})^{-\frac{1}{2}}$.

33. Aufg. BA ist ein Kreis, dessen Mittelpunct O. Man sucht die Zeit des Ganges durch jeden Bogen EA.

Aufl. Es sey OA = a; AG = b; so gehört in A die Geschwindigkeit der Höhe gb (25). Es sey AP = x, so ist $PM = r(2ax - xx)$ und $Mm = \frac{a\,dx}{r(2ax - x^2)}$. In M aber gehört die Geschwindigkeit der Höhe g. GP = g. (b − x). Also ist die Zeit durch Mm, $= \frac{a\,dx}{r[g.(b-x).(2ax-x^2)]}$. Dieses so integrirt, daß es für x = o verschwindet, und alsdenn x = b gesetzt, giebt die Zeit durch EA.

Nun gibt das Differential (32) mit $\frac{a}{rg}$ multiplicirt, das gegenwärtige, also ist nach gehöriger Berechnung die Zeit durch EA

$$\frac{\pi r}{2}\sqrt{\frac{2a}{g}}\cdot\left(1+\tfrac{1}{4}\cdot\frac{b}{c}+\tfrac{9}{64}\cdot\left(\frac{b}{c}\right)^2+\tfrac{1}{2}\tfrac{2}{5}\tfrac{5}{6}\cdot\left(\frac{b}{c}\right)^3\ldots\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1.3.5\ldots.(2n-1)}{2.4.6\ldots.\quad 2n}\right)^2\cdot\left(\frac{b}{c}\right)^n\ldots\right.$$

welche Reihe convergirt, weil b < c, und die Coefficienten lauter eigentliche Brüche sind, indem ie-

der Factor des Nenners um 1 mehr ist als der darüber stehende Factor des Zählers.

34. Zus. Wenn b unendlich klein wird, so wird die Zeit durch einen unendlich kleinen Bogen $= \frac{\pi r 2a}{2rg}$.

35. Zus. Vielleicht würde man bey dem ersten Gedanken von einem unendlich kleinen Bogen, erwarten, die Zeit durch ihn unendlich klein zu finden. Die geringste Aufmerksamkeit aber wird sogleich entdecken, daß diese Erwartung ungegründet wäre. Die lothrechte Kraft wird an jeder Stelle des Weges, den der Körper nimmt, in zweene Theile zerfällt, deren einer, auf das Element seines Weges an selbiger Stelle senkrecht ist, und völlig aufgehoben wird, der andere mit diesem Elemente parallel geht, und der ist eigentlich was den Körper längst dieses Elementes hintreibt, eben wie die grauitas respectiua bey einer schiefen Fläche (Stat. 102.). Die Elemente, welche der Verticallinie AO 19. F. zunächst liegen, sind fast wagrecht, also ist der Theil der lothrechten Kraft, der mit ihnen parallel wirkt, unendlich klein, und dieses findet gleich im Anfange der Bewegung bey E statt, wenn EA unendlich klein ist, Also brauchen diese unendlich kleinen Kräfte, eine endliche Zeit, den Körper durch einen unendlich kleinen Raum zu bringen. Jede von diesen Kräften für sich, würde den Körper in einer unendlich kleinen Zeit, durch einen Raum bringen, der unendlich kleiner wäre, als

der

der Raum, durch welchen ihn in eben der unendlich kleinen Zeit, eine endliche Kraft führte. Aber dieser letztere Raum wäre unendlich klein von der ersten Ordnung, folglich ist jener Raum unendlich klein von der zweyten, und wenn also EA selbst unendlich klein von der ersten Ordnung ist, so kann man sich solches in unendlich kleine Theile von der zweyten Ordnung getheilt vorstellen, deren jeder in einer unendlich kleinen Zeit, also das Ganze in einer endlichen beschrieben wird.

36. Zus. Weil man sich den Bogen EA allemahl in Theile, die in Vergleichung seiner unendlich klein sind, eingetheilt vorstellen muß, so kann man ihn in (34) nicht mit seiner Sehne, der geraden Linie EA verwechseln, wie man sonst bey unendlich kleinen Bogen thut. Denn jedes Element des Bogens EA hat eine andere Neigung gegen den Horizont, da die Sehne immer einerley behielte. Daher ist die Zeit (34) von der durch die verschwindende Sehne EA unterschieden. Die letztere wäre $2r\frac{2a}{g}$ (23), und verhält sich zur ersten wie $1 : \frac{1}{4}\pi$. Also die Zeit des Falles durch den Durchmesser, oder des Pendels doppelte Länge, zur Zeit eines ganzen Schwunges $= 1 : \pi$.

37. Zus. Ist AN $=$ EA auch unendlich klein, so ist die Zeit eines Hinganges durch EAN, oder Rückganges durch NAE, eines halben Schwunges (28) $= \frac{\pi r}{r}\sqrt{\frac{2a}{g}}$.

38. Zus. Dieses bleibt für unendlich kleine Schwingungen auch noch wahr, wenn gleich g nicht unveränderlich wäre. Denn da sich die Veränderung der Kraft nach den Höhen über A richten würde, so wird sie für unendlich kleine Höhen unendlich klein seyn.

39. Zus. Wäre EAN ein unendlich kleiner Bogen irgend einer andern krummen Linie, so würde man solchen für einen unendlich kleinen Kreisbogen annehmen dürfen, der O zum Mittelpuncte hätte, so daß a der Halbmesser der Krümmung für die gegebene Linie bey A wäre.

40. Zus. Gehörten EA, AN, zu zwo unterschiedenen krummen Linien, deren Krümmungshalbmesser in A, a und α wäre, so wäre die Summe des Falles durch EA, und des Steigens durch AN, oder die Zeit des halben Schwunges $= \frac{\pi.(r\,a + r\,\alpha)}{r^2 g}$.

41. Zus. Wenn im Kreise, b nicht unendlich klein, aber doch sehr klein ist, so kann man für die Zeit eines solchen kleinen Niederganges, der Reihe beyde erste Glieder $1 + \frac{b}{4c}$ behalten. Sie verhält sich also zur Zeit des unendlich kleinen Niederganges, wie $4c + b : 4c$ oder wie der vierfache Durchmesser um des Bogens EA Quersinus vermehrt, zum vierfachen Durchmesser selbst.

Es bedeute t die Zeit des unendlich kleinen Schwunges, T die Zeit des endlichen kleinen, so ist

$T = t$.

$T = t.(1 + \frac{b}{4c})$ daß man also diese aus jener finden kann. Umgekehrt ist auch $t = \frac{T}{1 + \frac{b}{4c}} = T.(1 - \frac{b}{4c})$.

Gesetzt t wäre eine Secunde, und man wollte wissen, was dieser Unterschied zwischen t und T in einem ganzen Tage betrüge der $24.3600 = 86400$ Secunden hält. So ist $86400\,t = 86400\,T - \frac{b}{4c}.86400.T$, oder, wenn man T, eine Secunde nennt, da man eigentlich t so nennen sollte, so hat der Tag, dieser unrichtig so genannten Secunden $\frac{b}{4c}.86400$ zu wenig, und eine Uhr die dergleichen Secnnden wiese, ginge in einem Tage um so viel ihrer Secunden zu langsam.

Exempel. Wenn ein Pendel das 3 Fuß 8 Lin. pariser Maaß lang ist unendlich kleine Gänge in einer Secunde macht, so fragt sich wieviel eben dieses Pendel langsamer gehen wird, wenn es einen Bogen beschreibt, dessen Sehne 6 Zoll ist.

Hier ist $a = 3.144 + 8\,Lin = 440\,Lin$; also $c = 880\,L$ und die Sehne $6.12\,Lin = 72\,Lin$. Daher die halbe Sehne oder BC 21. F. $= 36$ und $OC^2 = 440^2 - 72^2 = 193600 - 1296 = 192304$ Daher wie man ohne Rechnung aus Ludolfi Tetragono-

metria

metria findet OC = 438,53 – und a – OC oder b = 1,47 + daher $\frac{b}{4c} = \frac{1,47}{4.4.11,10} = 0,00041761.$

-4 -8

Weil dieses < 5 so ist das Quadrat davon < 25 und wenn man also das Quadrat und höhere Potenzen wegläßt, so begeht man einen Irrthum, der erst 10 000 000 mahl genommen ganze, hier nähmlich Secunden gäbe, hier also dergleichen nicht geben kann, da nur mit 86400 multiplicirt wird. Es ist aber 0,00041761. 86400 = 36,08... Man könnte sich auch die Division ersparen und $\frac{b}{4c}$. 86400 durch Logarithmen berechnen. Also ginge dieses Pendel in 24 Stunden ohngefähr 36,1 seiner Secunden zu langsam. So läßt sich die Tafel beym de la Lande expolition du calcul Astronomique art. 253. berechnen, wo dieses Exempel das letzte ist.

Wenn die Sehne e heißt, so ist $OC = r(\frac{1}{4}c^2 - \frac{1}{4}e^2) = \frac{1}{2}r(c^2 - e^2) = \frac{1}{2}.(c - \frac{e^2}{2c}) = \frac{1}{2}c - \frac{e^2}{4c}$ also so $b = \frac{e^2}{4c}$ und $\frac{b}{4c} = \frac{e^2}{16c^2}$. Da nun dieses mit 86400 multiplicirt giebt, wieviel Secunden das Pendul zu langsam geht, und sich hierinn bey einerley Länge des Pendels nur e verändert, so verhält sich alsdenn diese Zahl von Secunden, wie das Quadrat der Sehne. Und weil für die Sehne = 6 Zoll, die Zahl der Secunden beynahe 36 ist, so giebt

das

das Quadrat der Menge von Zollen, welche auf die Sehne gehen, die gesuchte Zahl von Secunden. Z. E. wenn eben das Pendel einen Bogen beschreibt, dessen Sehne 3 Zoll ist, so geht es in einem Wege 9 Sec. zu langsam. D. l. Lande a. a. O.

42. Zus. Wenn man in I. 80, m beyseite setzt, und f = g, t = der Zeit (34) annimmt, so fiele der Körper in dieser Zeit, durch die Höhe $\frac{\pi^2 a}{8}$, dem vierten Theile des Schwunges (40).

43. Zus. Die Zeit eines unendlich kleinen Niederganges, und also auch eines halben oder ganzen solchen Schwunges, verhält sich bey einerley Kraft wie die Quadratwurzel aus des Pendels Länge (34). Ein langes Pendel also, schlägt nach dieser Verhältniß langsamer; ein z. E. viermahl kürzeres, noch einmahl so geschwind.

44. Zus. Bey verschiedenen Kräften, aber einerley Länge des Pendels, verhalten sich diese Zeiten verkehrt, wie Quadratwurzeln aus den Kräften. Also geht ein Pendel von gegebener Länge, da langsamer, wo eine schwächere Kraft wirkt, und dieses Pendel müßte also verkürzt werden, wenn es bey dieser schwächern Kraft, so geschwind gehen soll, als es zuvor bey der stärkern ginge. Dieß dienet zur Erläuterung bey Astron. 210. Bey der Wirkung einer schwächern Kraft fällt ein Körper langsamer, oder braucht mehr Zeit durch eben die Höhe zu fallen (I. 80.), woraus das gegenwärtige begreiflich werden wird.

45. Aufg. Wenn a, als die Länge eines Pendels, das bey der Wirkung unserer Schwere jeden unendlich kleinen Hingang oder Hergang in einer Secunde, also einen Schwung in zwo Secunden macht, gegeben ist, zu finden, wie tief ein Körper in einer Secunde bey uns fällt.

Auf. In einer halben Secunde fällt er durch die 42. angegebene Höhe, also in der ganzen viermahl so tief (I; 35.) durch die Höhe $\frac{\pi^2 a}{2}$.

Huygens (Horologium Oscillatorium P. IIII. Prop. 25.) setzt $a = \frac{3.881}{864}$ pariser Fuß $= \frac{8}{2}\frac{8}{8}\frac{1}{8}$ par. F. $= \frac{8}{2}\frac{8}{8}\frac{1}{8}.\frac{1}{1}\frac{4}{3}\frac{4}{9}\frac{0}{1}\frac{0}{3}$ rheinl. Aus den Werthen von $\frac{1}{2}\frac{1}{8}\frac{1}{8}$ (Arithmet. 3. C. 3. §.) und $\frac{1}{1}\frac{4}{3}\frac{4}{9}\frac{0}{1}\frac{0}{3}$ (Geom. 32. S. 2. Anm.) findet man durch die Decimalrechnung $a = 3,16610359$. Euler Mech. II. B. 279. §. setzt es $= 3,16625$, der Unterscheid hat, wie in der Folge erhellen wird, nur einen unbeträchtlichen Einfluß. Ich habe aus meiner Zahl die Rechnung folgendergestalt geführt: wenn man $\frac{1}{2}\pi = 1,5707 + 96326 - 5$ setzt (Geom. 44. S.), so findet man vermöge der Zusammensetzung des Quadrats, aus den Tafeln in Ludolfs Tetragonometria Tabularia $\frac{1}{4}\pi^2 = 2,46740109$ davon die Hälfte genommen, und mit meinem a multiplicirt, giebt die Höhe (42) $= 3,9060237$ und dieses viermahl genommen, die Höhe des Falles in einer Secunde 15, 6241048 statt

dessen

dessen ich (I. 36.) aus Eulern Mech. L. I. §. 220; 15, 625 angenommen habe.

Hieraus folgt also m = $\frac{1}{2\,5\,0}$ (I. 77.) = 0,004 Die Zeit in Secunden zu finden, müssen mit dieser Zahl die Formeln 33; 34; 37; 40; multiplicirt werden, nachdem man die Längen in Tausendtheilchen des rheinländischen Fusses ausgedrückt hat.

46. Anm. Wie die Versuche, diese Länge des Pendels zu bestimmen, in völliger Schärfe müssen angestellt werden, läßt sich hier noch nicht erklären. Man wird die Schwürigkeit dabey aus 10. einsehen. Hätte man nur die Zeit des Ganges eines Pendels, dessen Länge man wüßte, in Secunden, so liesse sich aus 43. leicht die Länge des Secundenpendels bestimmen. Man dürfte zu dieser Absicht nur die Schläge eines Pendels von bekannter Länge, eine gewisse Zeit, z. E. eine Stunde lang zählen. Die Zeit würde man wohl etwa nach einer Sonnenuhr, oder nach dem Stande der Sterne bestimmen müssen, wenn man nicht dabey schon eine Secundenuhr gebrauchen, das ist, was hier noch gesucht wird, als bekannt annehmen wollte. Aus der Astronomie wird begreiflich seyn, wie man eine jede Uhr dazu brauchen könnte, die nur einen gleichförmigen Gang hätte, und die Möglichkeit einer solchen Uhr erhellt aus Stat. 145. Man müsste nähmlich den Gang der Uhr, den man an sich ungeändert liesse, aus Beobachtungen kennen lernen. Ich zeige diese Dinge nur kürzlich an, um zu weisen, wieviel noch den hiesigen Lehren zur Ausübung fehlt.

47. Anm. Huygens wollte den dritten Theil der Länge des Secundenpendels als einen allgemeinen Fuß angeben (Hor. osc. P. IIII. Pr. 25.), welcher also 1,055 des rheinländischen betrüge (45). Die Länge des Secundenpendels genau zu finden, möchten wohl nicht alle, die mit Fußmaassen zu thun haben, Geschicklichkeit genug besitzen, und sie ist auch, wie aus der (44) angef. Stelle der Astron. erhellt,

erhellt, nicht überall einerley. Daher schlägt Condamine Voy. de la Riv. des Amaz. $\frac{1}{3}$ des Pendels unter dem Aequator, aber Bouguer fig. de la terre p. 300. $\frac{1}{3}$ dessen in der Breite von 45° vor.

48. Zus. Bedeutet a die Länge des Secundenpendels bey uns, so wird ein Pendel von der Länge f, $r\frac{f}{a}$ Secunden schlagen (43).

Wird für f der Halbmesser der Erde = 20382230 rheinl. Fuß angenommen, so ist die Zeit eines halben Schwunges eines Pendels von dieser Länge, ohngefähr 2536 Sec. (Euler Mech. L. II. §. 183.).

Die Rechnung ist vermöge Ludolfs Quadrattafeln und der Logarithmen bis auf 100000 sehr leicht zu machen: Aus Ludolfs Quadrattafeln fällt r f zwischen die Quadratwurzeln von 20 38256,09 und 20381613,16 man kann es also 4514,6 annehmen.

Nun ist

$$\begin{aligned} l\,4514{,}6 &= 3{,}6546192 \\ \tfrac{1}{2}\,l\,3{,}1661 &= 0{,}2502623 \quad (45) \\ \hline & 3{,}4043569 \end{aligned}$$

Dieser Logarithme gehört zu 2537 +

49. Zus. Wenn a die Länge des Secundenpendels bey uns, und h desselben Länge, wo eine Schwere = k statt findet, bedeutet, so ist (37) $\pi r\frac{2h}{g}$ $= \pi r\,2a$ oder $h = a.g.$

Ist

Ist auf der Oberfläche der Sonne, $g = \frac{1000}{41}$ (Eul. Mech. L. I. §. 211.) so wird die Länge des Secundenpendels daselbst $= 3,1661 . \frac{1000}{41} = 77,221$ Fuß.

50. Zus. In 24. VII. Satz, ist die Zeit $= 2m\pi\sqrt{rb}$ aus 37; 45; so groß als der ganze Schwung eines Pendels, dessen Länge der halbe Parameter wäre. Huygen a. a. O. nennt jeden Hingang oder Hergang einen Schwung. Eben so ist das. im XIII. S. die Zeit so groß als der Schwung eines Pendels, dessen Länge $= e$. Diese beyden Ergänzungen zu 24, gesetzt, hat man alles, was in Huygens dorten angezeigter Schrift gelehrt wird.

51. Zus. Man setze, zwey Pendeln, deren Längen a, α, sind, sollen durch die Schweren g, γ, getrieben werden, man hebt aber zum Anfange der Bewegung eines eben so weit aus der lothrechten Linie als das andere, daß der Winkel EOA (19. F.) und folglich sein Quersinus $\frac{b}{c}$ für beyde einerley ist.

So ist die unendliche Reihe (33) für beyde einerley, und wenn die Pendeln auch Schwünge von endlicher Grösse beschreiben, so kann man doch diese Schwünge, welche sich durch ähnliche Bogen erstrecken werden, leicht mit einander vergleichen. Die Zeiten solcher Schwünge nähmlich verhalten sich wie $\sqrt{\frac{a}{g}} : \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}$.

52. Zus. Die Zeiten sind also gleich, wenn sich die Längen wie die Schweren verhalten. Bey gleich

langen Pendeln verhalten sich die Zeiten verkehrt wie die Quadratwurzeln aus den Schweren, die Mengen von Schwüngen, die in gleichen Zeiten geschehen, werden sich verkehrt wie die Zeiten verhalten, in denen einzelne Schwünge geschehen, also ordentlich wie die Quadratwurzeln aus den Schweren. Joh. Bernoulli Op. T. I. n. 90. §. 6. 7. 8.

Die Linie von einerley Zeiten des Falles (tautochrona).

53. Aufg. Ein Körper, der 16. F. in B gelegt, von dar aus der Ruhe bis A fällt, braucht dazu eine gewisse Zeit. Man sucht, wie die krumme Linie EBMA beschaffen seyn muß, wenn der Körper in jeden andern Punct E gelegt, eben so viel Zeit brauchen soll, von E aus der Ruhe durch EA zu fallen: So daß er gleichviel Zeit braucht, bis A zu fallen, an welche Stelle der krummen Linie man ihn auch legt. Von dieser Eigenschaft heißt die Linie tautochrona, im Deutschen könnte man sie die Linie von einerley Zeiten des Falles nennen.

Aufl. I. Wenn $AP = x$, $AM = s$, $AC = h$, so gehört in M die Geschwindigkeit der Höhe $\sqrt{(h-x)}$ und das Element der Zeit ist $\frac{ds}{\sqrt{(h-x)}}$. Dieses muß so integrirt werden, daß es für $s = o$ verschwindet, so giebt es die Zeit durch MA; In dem solchergestalt gefundenen Integrale setzt man $x = h$, so kömmt die ganze Zeit durch BA. Und diese ganze Zeit soll

einerley

einerley bleiben, h mag groß oder klein seyn. Also muß ihr Werth so beschaffen seyn, daß er h nicht enthält.

II. Man setze $ds = pdx$, wo man also wird suchen müssen, wie p beschaffen ist.

III. Weil h dem bestimmten Bogen AB zugehört, und für einen andern Bogen AE eine andere Grösse nähmlich AD statt h käme, so kann der unbestimmte Werth von s, der nach Gefallen AM, AB, AE, u. s. w. bedeuten kann, h nicht enthalten; folglich auch nicht sein Differential, und auch nicht p.

IIII. Also ist die unbestimmte Zeit $= \int \frac{p\,dx}{r(h-x)}$

Da sich jedes Integral durch eine Reihe ausdrücken läßt, sie mag nun endlich oder unendlich seyn, so setze man das gegenwärtige $= Ax^m + Bx^{m+\delta} \ldots$ Hier erhellt das erstlich die Exponenten alle bejaht seyn werden, weil das Integral für $x = o$ verschwinden soll: Ferner soll diese Reihe kein h enthalten, wenn man $x = h$ setzt. Also ist $A = \frac{F}{h^{m'}}$

$B = \frac{G}{h^{m+\delta}} \ldots$ wo F, G, ... beständige Grössen sind, die kein h enthalten, und das unbestimmte Integral ist $\int \frac{p\,dx}{r(h-x)}' = F.(\frac{x}{h})^m + G.(\frac{x}{h})^{m+\delta} \ldots$

Wenn man auf beyden Seiten differentiirt, mit

dx dividirt, und mit x multiplicirt, so kömmt $\frac{px}{r(h-x)}$ auch einer Grösse gleich, in der x und h zusammen keine Abmessung ausmachen, oder wo kein h ist, wenn $x = h$ gesetzt wird. Nun ist $\frac{1}{r(h-x)} = \frac{1}{r h . r(1-\frac{x}{h})}$ und aus An. Un. 50. giebt $h^{-\frac{1}{2}} . (1-\frac{x}{h})^{-\frac{1}{2}}$ eine Reihe wo x und h zusammen die Abmessung $-\frac{1}{2}$ haben. Also müssen in px die Abmessungen von x und h zusammen $+\frac{1}{2}$ ausmachen. Aber p enthält kein h (III). Folglich muß in p die Abmessung von x allein $-\frac{1}{2}$ seyn; oder es ist $p = Cx^{-\frac{1}{2}}$ wo C eine beständige Grösse ist, die kein h enthält.

V. Also ist $ds = Cx^{-\frac{1}{2}} dx$ und $s = 2Cx^{\frac{1}{2}}$ wo die Const die man addiren sollte $= o$ ist, weil x und s zugleich verschwinden.

VI. Die gesuchte krumme Linie ist also eine Cycloide, wie sie von einem Kreise beschrieben wird, dessen Durchmesser $= C.C$ (Un. 559.) oder umgekehrt eine Cycloide, die von einem Kreise beschrieben wird, dessen Halbmesser $= b$ ist, hat zur Gleichung $s = 2r2bx$, und ist also die gesuchte krumme Linie.

VII.

VII. Das Element der Zeit $\frac{ds}{r(h-x)}$ wird nun $r2b\frac{dx}{r(hx-x^2)}$. Aus (31) giebt dieses so integrirt, daß es für $x=o$ verschwindet, die Zeit durch MA, $r2b.B\sin\frac{2r(hx-x^2)}{h}$ und die Zeit durch BA; oder jeden anderen Bogen, wie EA, $\pi r2b$.

VIII. Soll diese Zeit des Niederganges durch jeden Bogen der Cycloide, so groß seyn als die Zeit des Niederganges des Pendels in (34) durch einen unendlich kleinen Bogen, so ist des Pendels Länge $a=4b$, so groß als der Halbmesser der Krümmung der Cycloide bey A (An. Un. 557. II.). Die Niedergänge durch die Cycloide und folglich die halben und ganzen Schwünge, so groß auch die ihnen zugehörigen Bogen seyn mögen, dauren allemahl so lange, als unendlich kleine Niedergänge, halbe und ganze Schwingungen eines Pendels, dessen Länge der doppelte Halbmesser des Kreises wäre, der die Cycloide beschreibt.

VIIII. Wenn QOS 15. F. ein Bogen einer Cycloide wie bea in der 32. Fig. der An. des Un. ist, so entsteht aus der Abwickelung 15. F. eben der Bogen der Cycloide BMA, nur in verkehrter Ordnung (Un. 590. VIIII.).

X. So läßt sich also nach (9) ein Pendel machen, das in einer Cycloide, endliche Schwünge von gegebener Dauer macht.

Sollen die halben Schwünge secundenlang dauren, so ist aus VII. und 45; 4b = 3,1661 oder der Halbmesser des Kreises, welcher die Cycloide beschreibt = 0,7915 rheinl. Fuß.

54. Zus. Hungens hat die Eigenschaft der Cycloide, daß die Schwünge durch grosse und kleine Bogen in ihr gleich lange dauren zuerst entdeckt, aber nicht so, daß er eine Linie gesucht hätte, welche diese Eigenschaft besässe, sondern er ist bey Untersuchung der Cycloide darauf gekommen, mit welcher krummen Linie sich die Geometern des vorigen Jahrhunderts sehr beschäftiget haben. Man wird aus 53; V; VI; leicht sehen, wie dieses geschehen kann, obwohl Hungens einen andern Weg gegangen ist. Er hat im II. Th. des horolog. osc. diese Lehre; und im III. die von der Abwickelung deßwegen abgehandelt. Die Anwendung hat er im I. Th. beschrieben. Er verlangte das Pendel zwischen ein Paar nach der Cycloide gekrümmter Bleche (53; VIIII.) zu henken. Nach ihm hat man dieses Verfahren wieder beyseite gesetzt. Als die Ursache wird zuweilen angegeben, daß die Cycloide diese Eigenschaft nur im leeren Raume, nicht in wiederstehender Luft hat. Ich sollte fast eher glauben, daß es daher rühre, weil Huygens bey seiner Vorrichtung der Uhren dem Pendel grössere Schwünge zu geben genöthiget war, als man es jetzt vermittelst des englischen Haakens machen läßt. S. des P. Alexanders Unterricht v. Uhren 3. C. 117. S. der deutsch. Ueb. Daher man sich vielleicht jetzt den Gebrauch der Cycloide eher ersparen kann.

55. Zus.

55. Zus. In der Analysis 53. bin ich, nur mit Beyfügung einiger Erläuterungen und Veränderungen die zur Erleichterung dienten, Hrn. Eulern Comm. Acad. Petrop. T. VII. p. 49. u. f. gefolgt. Er hat aber so wohl daselbst, als noch mehr im II. B. seiner Mechanik diese Untersuchungen noch viel allgemeiner angestellt, und weitläuftiger ausgeführt. Denn obgleich die Cycloide der Frage unter den gegebenen Einschränkungen allein genug thut, so gibt es doch noch mehr tautochronas, wenn man lauter halbe Schwingungen betrachtet, oder das Gesetz und die Richtungen der Kraft anders annimmt, oder den Wiederstand der Materie darinn die Bewegung geschicht mit in Rechnung zieht; In der Ausübung hat meines Wissens keine einigen Gebrauch gehabt als die Cycloide.

56. Zus. Man hat noch verschiedene Untersuchungen über die Bewegung der Körper auf gegebene Linien angestellt. Ein Exempel ist I. Abschn. 265. VII. angeführt. Linien in denen ein Körper in der kürzesten Zeit von einer gegebenen Stelle an eine andere gegebene kömmt, heißt man brachystochronas, u. s. w. Man hat diese Untersuchungen für Kräfte, deren Stärke und Richtungen veränderlich sind, auch für Bewegungen in wiederstehenden Materien angestellt. Endlich ist auch die Bewegung nicht nur auf gegebenen Linien, sondern auch auf gegebenen Flächen betrachtet worden. Diese Entdeckungen findet man grösstentheils im II. B. von Hr. Eulers Mechanica. Hieher gehört die Bewegung

um ein paraboliſches Sphäroid (24; VII. Satz), dieſe iſt zu einem gewiſſen Gebrauche in der Ausübung vorgeſchlagen worden. Man hat Uhren gemacht, wo ſich das Pendulum nicht, wie bey den gewöhnlichen, hin- und herſchwingt, ſondern immer in einer Rundung herumgeht, (alſo eine Art eines Kegels beſchreibt). Ihr Gang macht kein Geräuſch, und ſie ſind daher von manchen geſucht worden, ſie in Schlafkammern zu haben, wo ſie die Ruhe nicht ſtören. Leibniz, der dieſes berichtet, ſetzt hinzu, Huygens habe einen Aufſatz davon verfertiget, der nicht gedruckt worden, und darinn ſtatt der Cycloide, einen paraboliſchen Körper gebraucht, die Schwingungen gleich zu machen. Man ſ. Leibnizens Anmerckungen, die ſich am Ende von Sullys Règle artificielle du tems (Wien 1714.) befinden. Das muß alſo das erwähnte Sphäroid ſeyn. Aſtronomen werden ſolche Uhren nicht verlangen, denn ſie wollen die Pendelſchläge hören.

Drit-

Dritter Abschnitt

von

der Bewegung fester Körper, deren Grösse und Gestalt bestimmt sind.

Bewegende Kräfte am Hebel angebracht.

1. Aufg. CBA sey eine unbiegsame gerade Linie, 22. Fig. die sich um C in einer Ebene, wie Kreise beschrieben werden, drehen läßt. In B ist an ihr ein Körper befestiget, dessen Masse auch B heißt. Ich sehe aber diese Masse, noch als einen Punct, ohne Grösse an. Die Schwere soll jetzt in ihn keine Wirkung haben. In A wird eine bewegende Kraft (I. 49.), deren Grösse m ist, so angebracht, daß ihre Richtung in der Ebene, in welche sich die Linie drehen läßt, auf CA senkrecht ist. Man sucht die beschleunigende Kraft (I. 49.), welche B dadurch bekömmt.

Wollte man sich von dieser Aufgabe ein sinnliches Bild machen, so stelle man sich auf einem wagrechten Tische, eine Stange CA vor, die sich um einen Nagel in C, in der Ebene des Tisches drehen kann. Die Masse der Stange muß man hier aus den Augen setzen, und sie nur als eine Linie,

wie den mathematischen Hebel betrachten. An ihr sey die Masse B befestigt. Weil derselben Gewicht von dem Tische getragen wird, so kömmt hier nur die Masse in so weit sie träg ist, in Betrachtung. In A sey ein Faden angebunden, an welchem ein Gewicht m unter den Tisch hinunter hänge, so daß es ihn längst des Tisches, senkrecht auf CA zieht.

Aufl. Die beschleunigende Kraft, die der Körper in B bekömmt, wird ihn von B nach Bb senkrecht auf CB treiben. Sie heisse u, so ist u. B seine bewegende Kraft, und CB. u. B ihr Moment (Stat. 38.). Dieses muß so groß seyn, als das Moment m. CA der Kraft in A (Stat. 37.). Also ist $u = \frac{m.CA}{CB.B}$

$= \frac{m.p}{q.B}$ Wenn $CA = p$; $CB = q$.

Es wird niemanden befremden, daß ich vom Momente rede, dessen ich in der Statik bey schweren Körpern gedacht habe, und doch hier die Schwere beyseite setze. Der Begriff des Moments erfodert blos Kräfte die unter sich parallel und senkrecht auf eine Linie, die sich um einen festen Punct drehen läßt, wirken. Die Schwere ist von dieser Art, aber hier wird eben das angenommen.

Die Zeichen, deren ich mich bediene, recht zu verstehen, darf man nur acht haben, daß CB eine Linie durch die beyden Puncte, aber u. B mit dem Multiplicationszeichen in der Mitten, ein Product aus zwo Grössen, u, und B bedeutet.

2. Zus. Wenn in einer unendlich kleinen Zeit der Hebel aus seiner ersten Lage in die Cba gekommen ist, so kann man die beschleunigende Kraft suchen, in so fern sie diesen Winkel ändert. Das wird so geschehen: Von einer andern beschleunigenden Kraft, soll eine Masse in eben der Zeit durch Aa geführt werden, in welcher die Masse B von der ihrigen durch Bb geführt wird. Auf die Grössen der Massen kömmt hier nichts an (l. 49.). Diese andere beschleunigende Kraft, ist also $\frac{Aa}{Bb} \cdot \frac{m.p}{q.B}$ (l. 65.) $= \frac{m.p^2}{q^2.B}$ wenn die Bogen ähnlich sind.

Soll statt B eine andere Masse E, in der Entfernung CE = r, um eben den Winkel fortgeführt werden, um den A fortgeführt wird, es mag nun dieser Winkel ACa oder ein anderer seyn, so giebt dieses auf eben die Art in A eine beschleunigende Kraft $= \frac{mp^2}{r^2.E}$.

Soll also dieser letztere Winkel mit ACa einerley seyn, so sind beyde beschleunigende Kräfte in A gleich, also ist $r^2.E = q^2.B$, oder wenn zwo Massen vermittelst ihrer beschleunigenden Kräfte in gleicher Zeit um einerley Winkel fortgeführt werden sollen, so müssen sie sich verkehrt, wie die Quadrate ihrer Entfernungen vom Mittelpuncte verhalten.

3. Zus. Weil die bewegende Kraft m, mit der Masse dividirt, die beschleunigende gibt, und

die

die leztere $\frac{m.p^2}{q^2.B}$ ist, so muß die Masse $= \frac{q^2.B}{p^2}$ seyn. Das ist, wenn eine Masse von dieser Grösse in A gebracht, und dagegen B weggenommen wird, so gibt m dieser Masse in A, eine beschleunigende Kraft, vermöge welcher in gleichen Zeiten eben der Winkel beschrieben wird, der vermöge der beschleunigenden Kraft beschrieben wurde, die m der Masse B in ihrer Stelle gab.

In einer andern Ordnung lassen sich diese Schlüsse so vortragen: Die bewegende Kraft m, führet B durch Bb, also den Hebel um den Winkel ACa fort: Man fragt, wenn B weggenommen, und eine andere Masse, P in A gesetzt würde, wie groß diese Masse seyn müßte, damit der Hebel noch in eben der Zeit von eben der bewegenden Kraft m, um eben den Winkel verrückt, oder diese neue Masse um Aa fortgeführt würde.

Es wird also die beschleunigende Kraft nun $\frac{m}{P}$ seyn, und hier (1) ist $\frac{m}{P} : u = Aa : Bb$ das ist $\frac{m}{P} : \frac{m.p}{q.B} = p:q$ woraus $P = \frac{q^2.B}{p^2}$ folgt.

In der Folge werde ich den Ausdruck brauchen: die Masse P an A sey der Masse B an B gleichgültig, und wegen dieser Gleichgültigkeit, heißt das Product aus einer Masse in das Quadrat ihrer Entfernung, $CB^2.B = CA^2.P$, das Moment der Träg-

Trägheit aus einem Grunde ohngefähr wie der, der den Nahmen Moment in die Statik eingeführt hat (Stat. 38.). Gleichgültige Massen nähmlich haben einerley Moment der Trägheit und ein Moment der Trägheit mit dem Quadrate einer Entfernung dividirt, gibt die Masse, die in dieser Entfernung eben das Moment der Trägheit hat, und also daselbst jener Masse gleichgültig ist, für die man das Moment der Trägheit berechnet hatte.

4. Zus. Wenn in F, B, E, u. s. w. 23. F. Massen die ich eben so nenne, zugleich befestigt sind; und alle zusammen von einer in A angebrachten bewegenden Kraft, so sollen fortgeführt werden, daß die ganze Linie CA an der sie sind, in die Lage Ca kömmt, so stelle man sich diese bewegende Kraft, die nun m heissen soll, aus verschiedenen Theilen zusammengesetzt vor, der Theil α soll CA in Ca bringen, wenn B allein da wäre; der Theil β wenn E, und der Theil γ wenn F allein da wäre. Folglich wird α eben das thun, wenn B nicht da wäre, aber statt dessen in A die Masse $\frac{CB^2 . B}{CA^2}$ in A wäre. Und so thun β, γ, eben das, wenn die Massen E, F, weg, und statt ihrer in A, Massen von den Grössen $\frac{CE^2 . E}{CA^2}$ und $\frac{CF^2 . F}{CA^2}$ wären. Da nun die bewegende Kraft $m = \alpha + \beta + \gamma$, so erhellt, daß sie von der Beschaffenheit seyn muß, daß sie in einer Masse $\frac{CB^2 . B + CE^2 . E + CF^2 . F}{CA^2}$ die sich in A befände,

befände, eine beschleunigende Kraft wirckte, vermittelst welcher CA in der Zeit dt, sich in Ca verrückte. Es versteht sich, daß sich in CA sonst keine Masse, als die nur genannte, befände. Man begreift, daß dieses gilt so viel auch Massen sind, und daß die Masse in A, allemahl das seyn müßte, was herauskäme, wenn man die Summe der Producte aus jeder Masse in das Quadrat ihrer Entfernung durch das Quadrat von CA dividirte.

So ist das Moment der Trägheit der Masse in A so groß, als die Summe der Momente der Trägheit der einzelnen Massen (3), und der Punct A ist für die trägen Massen ohngefähr so was, wie der Schwerpunct für schwere (Stat. 43.).

5. Zus. Eben das würde auch noch statt finden, 24. F. wenn CB, CE, CF, nicht auf der Linie CA lägen, sondern Arme eines Winkelhebels aber alle in einer Ebene durch CA wären, die sich denn alle zugleich um einerley Winkel verrücken müssen. Denn wie in Stat. 55. erhellt, daß dieser Winkelhebel dem geradelinichten gleichgültig ist.

Vom Mittelpuncte des Schwunges.

6. Erkl. Die unbiegsame Linie 23. F. sey nun mit Gewichten B, E, F, beschwert. Wenn sie nun in C so befestigt ist, daß sie sich darum in einer lothrechten Ebene bewegen kann; und wenn man sie in eine schiefe Lage bringt, so wird sie sich nach Art eines Pendels hin und her schwingen. Das heißt

ein

ein zusammengesetztes Pendel (pendulum compositum). Ein schwerer Punct an einem mathematischen Faden, wie II. Abschn. 33; betrachtet worden, heißt ein einfaches.

7. Zus. Die Gewichte müßten nicht eben als schwere Puncte betrachtet werden, sondern man könnte ihre Grösse und Gestalt mit in Erwägung ziehen. Man könnte sich in allen Puncten der Linie, Gewichte vorstellen, und dadurch die Linie in einen schweren Körper, verwandeln, wie den mathematischen Hebel in den natürlichen (Stat. 48.). Man könnte sich die Linie nach CZ verlängert vorstellen, und auf beyden Seiten des Punctes C Gewichte annehmen. Dieses zeigt, daß es eine grosse Mannichfaltigkeit zusammengesetzter Pendel geben kann.

8. Erkl. Läßt sich ein einfaches Pendel finden, das seine Schwünge in gleichen Zeiten mit den zusammengesetzten vollbringt, so nehme man einen Punct, so weit von C, als die Länge dieses einfachen Pendels. Dieser Punct heißt der **Mittelpunct des Schwunges**, (centrum oscillationis). Diese Untersuchung betrifft also nichts weiter, als die Länge des erwähnten einfachen Pendels. Huygens, der Erfinder dieser Lehre, braucht diese Redensart Hor. osc. P. IIII.

9. Aufg. An einer mathematischen Stange 25. F. die sich um C drehen läßt, sey ein schwerer Punct B fest. Die beschleunigende Kraft der Schwere sey = g, daß also das Gewicht = g. B ist. Die

Stange

Stange sey aus der lothrechten Lage in die schiefe, welche die Figur darstellt, gebracht. Man sucht was für eine Gewalt das Gewicht in dieser Lage der Stange anwendet, sie um C zu drehen.

Aufl. Diese Gewalt muß nach BT senkrecht auf die Stange, in der Ebene gerichtet seyn, in welcher sich die lothrechte Linie BQ befindet, nach welcher die Schwere das Gewicht treibt. Stellt also die letztgenannte Linie die ganze Last des Gewichtes vor, und ist QT mit CA parallel, so zerlegt sich diese Last in einen Theil nach TQ, dessen Wirkung die Festigkeit der Stange völlig aufhebt, und einen Theil nach BT, der die Stange um C drehen will. Dieser letzte ist $\frac{BT}{BQ}$. g.B oder g. B. sin η wenn η den Winkel bedeutet, den die Stange in ihrer jetzigen Lage mit der Verticallinie macht. Das Gewicht wendet also bey dieser Lage der Stange eben so viel Gewalt an sie zu drehen, so viel Gewalt ein Gewicht = g. B. sin η anwenden würde, einen horizontalen Hebel zu drehen, an dem es in einer Entfernung = CB von seiner Unterlage senkrecht herabhinge.

Oder, man kann die Stange in ihrer jetzigen Lage als einen Hebel betrachten, an dem sich in B das Gewicht g. B. sin η befände, dessen Schwere aber nicht der unsrigen parallel, sondern senkrecht auf die Stange wirkte.

11. Zus. Das Moment, mit welchem die Stange gedreht wird, ist CB. g. B. sin η.

12. Zus.

12. Zus. Und für ein anderes Gewicht, E, ist es CE. g. E. sin η.

13. Zus. Wenn A beyder Schwerpunct, also CA. (B+E) = CB. B + CE. E ist (Stat. 44.) so drehte ein Gewicht g. (B+E) in A die Stange mit dem Momente CA. (B+E). g. sin η das ist, mit der Summe beyder Momente (11. 12.), und also wird die Stange mit gleicher Gewalt gedreht, es mögen jene beyden Gewichte oder dieses einzige an ihr seyn, wie der Hebel (Stat. 46.).

14. Zus. Da das Verfahren der Statik mit dem Hebel, wie gezeigt worden ist, hier völlig nachgeahmt werden kann, so mag die Stange so viel schwere Puncte enthalten, als sie will, sie mögen auch alle auf einer Seite oder auf verschiedenen des Punctes C liegen; Allemahl werden alle diese Gewichte zusammen das thun, die Stange aus ihrer jetzigen Lage in die nächste zu bringen, was die Summe aller dieser Gewichte in ihrem gemeinschaftlichen Schwerpuncte angebracht thun würde.

15. Zus. Wären, 24. F. B, E, F, schwere Puncte in einer Ebene, die sich um eine wagrechte Axe, von welcher sie in C durchbohrt würde, so drehen liesse, daß sie immer in einer lothrechten Ebene bliebe, und hätte man diese vermittelst der beweglichen, Ebene verbundene Gewichte, aus derjenigen Lage gebracht, in welcher sie vermöge ihres Gleichgewichtes ruhig hängen bleiben, so würde jedes die Linie CB, CE, CF, an der es sich um C bewegen kann, in eine andere Lage zu bringen suchen, und durch

die gemeinschaftliche Wirkung aller zusammen, wird die Fläche gedreht, und jede Linie auf ihr durch C, aus ihrer jetzigen Lage in eine andere gebracht werden. Ich sage die Ebene zu drehen, und so jede Linie durch C aus ihrer jetzigen Lage in die nächste zu bringen, werde einerley Gewalt angewandt werden, es mögen sich die Gewichte auf die beschriebene Art auf der Ebene ausgetheilt befinden, oder es mag ihre Summe in ihrem gemeinschaftlichen Schwerpuncte A beysammen seyn. Denn wie schon in (5) erinnert worden, läßt sich jeder Winkelhebel wie ACB, ACE, u. s. w. auf einen geradelinichten bringen, wo eben die Gewichte in eben den Entfernungen, nur alle in der geraden Linie CA befindlich wären; und so erhellt die Sache aus (14).

16. Zus. Wenn die Linie CA in die verticale Lage kömmt, so sind alle Gewichte auf der Ebene in Bewegung, und weil nichts da ist, das solche Bewegung plötzlich aufhübe, so setzen sie diese Bewegungen fort, und die Linie CA steigt also wieder auf der andern Seite aus der lothrechten Lage. So macht die ganze Ebene Schwingungen; unendlich kleine, wenn CA unendlich wenig aus der lothrechten Lage gebracht war.

17. Aufg. Die Länge eines einfachen Pendels zu finden, dessen unendlich kleine Schwingungen, mit den unendlich kleinen der Ebene (16) in gleichen Zeiten vollendet werden.

Aufl. Die Ebene wird so gedreht, als wäre statt der auf ihr ausgetheilten Gewichte, ihre Sum-

me

me in A (15), das ist als wären in den Stellen B, E, F, nur Massen, ohne Schwere, und in A eine bewegende Kraft g.(B + E + F). Da man nach I. Abschn. 49. u. f. jedes Gewicht als eine bewegende Kraft ansehen kann. Dieses bringt nun die gegenwärtige Frage auf (5). Diese bewegende Kraft nähmlich, dreht die Ebene auf einerley Art, es mögen sich die Massen B, E, F, an ihren Stellen befinden, oder man mag statt jeder in A die gehörige setzen; das ist, man mag statt der Massen, die auf der Ebene ausgebreitet sind, die Masse $\frac{CB^2.B + CE^2.E + CF^2.F}{CA^2}$ in A bringen. Soll aber diese Masse in A von der dasigen bewegenden Kraft g.(B+E+F) bewegt werden, so giebt dieses für die beschleunigende Kraft $\frac{g.CA^2.(B+E+F)}{CB^2.B+CE^2.E+CF^2.F}$

Die Linie CA, und mit ihr die Ebene wird also so gedreht, als wenn in A, die nur gefundene beschleunigende Kraft, und zwar nach Art der Schwere vertical wirkte; das ist, CA, und mit ihr die Ebene, wird sich wie ein Pendel schwingen, das die Länge CA hätte, und von der nur erwähnten beschleunigenden Kraft getrieben würde. Man setze die Kraft g, $=1=$ unserer Schwere, so ist aus II. Abschn. 37. statt der dortigen a, g, hier CA, und die gefundene beschleunigende Kraft gesetzt, das Quadrat der Zeit eines halben Schwunges dieses Pendels $\frac{\pi\pi.2.(CB^2.B + CE^2.E + CF^2.F)}{(B+E+F).CA}$ man

setze solches so groß als das Quadrat der Zeit eines halben Schwunges eines einfachen Pendels, dessen Länge a ist, und das von unserer Schwere getrieben wird, oder $= \pi\pi . 2a$ so kömmt die Länge dieses

Pendels $a = \frac{CB^2 . B + CE^2 . E + CF^2 . F}{CA . (B + E + F)}$. Oder,

man finde die Summe aller Producte aus jedem Gewichte in das Quadrat seiner Entfernung von C; diese dividire man, durch das Product der Entfernung des gemeinschaftlichen Schwerpunctes aller Gewichte, von C, in ihre Summe; Oder mit andern Worten; Man dividire die Summe der Momente der Trägheiten der Massen (3) durch das Moment der Summe ihrer Gewichte (Stat. 46.). Der Quotient ist die Länge des gesuchten Pendels. Ist also $CO = a$ so ist O der Mittelpunct des Schwunges (8). Diese Regel gilt, wie in die Augen fällt, soviel auch Gewichte, und in was für Stellungen sie auf der Ebene sind.

Zus. Wenn $B = E = F$ oder alle Gewichte gleich sind, und ihre Zahl $= n$ ist, so ist

$$a = \frac{CB^2 + CE^2 + CF^2 \ldots}{CA . n . B} . B$$

$$= \frac{CB^2 + CE^2 + CF^2 \ldots}{n . CA}$$

oder die Summe der Quadrate aller Entfernungen der Gewichte durch das Product aus CA in ihre Menge dividirt.

18. Aufg. MBN ist eine gegebene ebene schwere Figur, die durch CP, in ähnliche Hälften getheilt wird. MQ = QN sind ihre Ordinaten auf die Abscissen BP, senkrecht. CB ist auch gegeben. Durch C geht CG, eine wagrechte Axe auf die Ebene der Figur senkrecht, und die Figur schwingt sich in einer verticalen Ebene, die auf diese Axe senkrecht ist. Man sucht den Mittelpunct des Schwunges.

Aufl. I. Es kömmt hier also darauf an zu sehen, was die Gewichte, ihre Entfernungen von C, und die Summe der Producte aus den Quadraten dieser Entfernungen, in die jeder zugehörige Gewichte sind.

II. Durch einen willkührlichen Punct Q der Ordinate PM, ziehe man QR der Linie BQ parallel, und eben so qr durch einen Punct, der jenem unendlich nahe ist. Ist nun pm eine unendlich nahe Ordinate, so ist QqrR ein unendlich kleiner Theil der Ebene, den man als ein Gewicht ansehen kann, das CQ zur Weite von C hat. Man suche also die Summe aller $CQ^2 . Qr$, die in Mp enthalten sind. In pN sind eben soviel, also darf man nur diese Summe verdoppeln, um die Summe aller solcher Producte in Mn zu haben.

III. Weil nun die Figur MCN unzählich viel Mn enthält, so muß man nun die Summe aller in II. gefundenen Summen suchen, die in der ganzen Figur enthalten sind. Sie wäre der Zähler des Werthes von a (17).

IIII. Der Nenner ist die Summe aller Producte, deren jedes sich durch CP. Mn ausdrücken läßt (An. Un. 637.).

V. Es sey also CB = e, BP = x, PM = y = PN PQ = u, so ist Qr = dudx, und CQ^2. Qr = [$(x+e)^2 + u^2$]. dudx. Dieses ist das Differential der Summe in II. Man findet also diese Summe, wenn man diesen Ausdruck so integrirt, daß nur u in ihm als veränderlich angesehen wird, denn für alle die in Pm enthaltenen Producte bleibt einerley x und dx; Folglich ist das Integral $(x+e)^2$. udx + $\frac{1}{3}u^3$ dx, welches für u = o verschwindet, und folglich die Summe aller dieser in Pr enthaltenen Producte anzeigt. Also ist, u = y gesetzt, die Summe aller in PM enthaltenen Producte $(x+e)^2$. ydx + $\frac{1}{3}y^3$ dx, welches verdoppelt die Summe aller in Mn enthaltenen Producte giebt. Folglich wird der III. angezeigte Zähler $2\int(x+e)^2$. ydx + $\frac{2}{3}\int y^3$ dx. Und da der Nenner $2\int(x+e)$. ydx ist, so wird

$$a = \frac{\int(x+e)^2 . y . dx + \frac{1}{3}\int y^3 dx}{\int(x+e)\,y\,dx}$$

wo sich die Integrale nehmen lassrn, wenn die Gleichung für die krumme Linie gegeben ist. Sie müssen so genommen werden, daß jedes für x = o verschwindet. Will man die Schwingungen eines bestimmten Stücks der Figur etwa DBF haben, so setze man BE = c, da denn auch die Ordinate EB bestimmt ist, und man in dem Integrale, diese Ordinate und c, statt y und x setzen muß.

19. Zus. Sollte sich die halbe Figur BMDE allein schwingen, so wäre ihr Schwerpunct zwar eben so weit von einer Linie die durch C mit den Ordinaten PM parallel geht, so weit der ganzen Figur DMBNF ihr Schwerpunct davon entfernt ist, wie sich aus An. Un. 637. herleiten läßt, aber der halben Figur Schwerpunct befände sich nicht in CE und also nicht in einer Weite von C mit dem Schwerpuncte der ganzen. Darnach müßte also die Rechnung vermöge 17. geändert werden. Ich erinnere dieses nur zu zeigen, daß der Grund in (17), die Untersuchung nicht auf den Fall (18) einschränke. Ich finde aber nicht nöthig, sie mit einer weitläuftigern Rechnung allgemeiner vorzunehmen, ohne sie dadurch zur Ausübung brauchbarer zu machen.

20. Exempel. Die Figur sey ein Rechteck, dessen mit BE parallele Seiten jede $=c$, die andere jede $=2f$, so ist $f=y$ und der Zähler $=f(x+e)^2$. $fdx+\frac{1}{3}f^3fdx=\frac{1}{3}.f.(x+e)^3+\frac{1}{3}f^3x+$Const Weil nun dieses für $x=o$ verschwinden soll, so ist Const $=-\frac{1}{3}fe^3$ Und so der Nenner $\frac{1}{2}f.(x+e)^2+$Const wo Const $=-\frac{1}{2}fe^2$. Also ist

$$a=\frac{2}{3}.\frac{(x+e)^3+f^2x-e^3}{(x+e)^2-e^3}.$$

21. Die Figur sey ein Abschnitt von einem Kreise, dessen Halbmesser $=r$; so ist $y=\sqrt{(2rx-x^2)}$ also

$$a=\frac{f(x+e)^2.\sqrt{(2rx-x^3)}.dx+\frac{1}{3}f(2rx-x^2).\sqrt{(2rx-x^2)}.dx}{f(x+e).\sqrt{(2rx-x^2)}dx}$$

Das Differential des Zählers ist

$e^2 . r(2rx - x^2) . dx + (2e + \frac{2}{3}r) . x . r(2rx - x^2) . dx$
$+ \frac{2}{3}x^2 . r(2rx - x^2) . dx$

Dieses läßt sich nach II. Abschn. 31. integriren. Es ist nähmlich für das erste dieser drey Differentiale, a. a. O.

II; 31	b	x	μ	ζ	λ	η	u
hier	2r	o	$\frac{1}{2}$	−1	$\frac{3}{8}$	$-\frac{3}{2}r - \frac{1}{2}x$	$r(2rx - x^2)$

Man findet ζ und η daraus, daß in diesen Reihen die Coefficienten beym Exponenten n in der Bedeutung II; 31; verschwinden. Es ist aber $n = 1$ für ζ, und $= 2$ für η. So wird also, mit der beständigen Grösse e^2 multiplicirt, des ersten Differentials Integral $\frac{e^2 . r^2}{2}$. Bsin $\frac{u}{r} - \frac{(r-x) . ue^2)}{2}$

Man hätte dieses kürzer daraus finden können, weil dieses Differential, e^2 mit dem Abschnitte eines Kreises, der zwischen x, u, und dem beyden zugehörigen Bogen enthalten ist, multiplicirt seyn muß. Indessen würde man doch zu II; 31. bey den folgenden Differentialen seine Zuflucht nehmen müssen, und daher wollte ich diesen Satz auch hier gleich anwenden.

Für das zweyte Differential, den unveränderlichen Factor beyseit gesetzt, ist,

II, 31	x	μ	ζ	λ	η
hier	1	$\frac{3}{8}$	$-\frac{3}{2}r - \frac{1}{2}x$	$1\frac{5}{6}$	$-\frac{5r^2}{2} - \frac{5rx}{6} - \frac{x^2}{3}$

Daher ist dieses zweyten Differentials Summe, wieder mit dem unveränderlichen Factor multiplicirt $(2e + \frac{2}{3}r) . (\frac{1}{2}r^3 . \text{Bsin}\frac{u}{r} - (\frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{6}rx - \frac{1}{3}x^2)u)$.

Für

Für das dritte Differential ist, wieder den unveränderlichen Factor beyseit gesetzt.

II; 31	x	μ	ζ
Hier	2	$\frac{5}{16}$	$-\frac{5}{2}r^2-\frac{5rx}{6}-\frac{x^2}{3}$

II; 31	λ	η
Hier	$\frac{35}{128}$	$-\frac{35r^3}{8}-\frac{35}{24}r^2x-\frac{7rx^2}{12}-\frac{1}{4}x^3$

Und daher das Integral des dritten Differentials, wieder mit dem beständigen Factor multiplicirt

$\frac{5}{12}r^4.\mathfrak{B}\sin\frac{u}{r}-(\frac{5}{12}r^3+\frac{5}{36}r^2x+\frac{1}{18}rx^2-\frac{1}{6}x^3)u$

Diese drey Integrale zusammen addirt, geben den Zähler von a.

Dieser Zähler wird

$$\left(\frac{e^2r^2}{2}+er^3+\frac{3}{4}r^4\right).\mathfrak{B}\sin\frac{u}{r}$$

$$\left[\begin{matrix}-\frac{e^2r}{2}+\frac{1}{2}e^2\\ -er^2-\frac{1}{3}re\\ -\frac{3}{4}r^3-\frac{1}{4}r^2\end{matrix}\right]\left.\begin{matrix}x+\frac{2}{3}e\\ +\frac{1}{6}r\end{matrix}\right\}x^2+\frac{1}{6}x^3\Bigg].u$$

Und der Nenner wird

$$\frac{1}{2}r^2.(e+r)\,\mathfrak{B}\sin\frac{u}{r}\left[\begin{matrix}-\frac{1}{2}er+\frac{1}{2}e\\ -\frac{1}{2}r^2-\frac{1}{6}r\end{matrix}\right]x+\frac{1}{3}x^2\Bigg]u$$

Für den ganzen Kreis ist $u=o$ und $x=2r$ also

$\mathfrak{B}\sin\frac{u}{r}=\pi$ (II. 30.).

Für ihn also ist $a=\frac{2e^2+4re+3r}{2(e+r)}$.

22. Lehrs. Die Ebene MBP, 27. F. sey an sich nicht schwer. Es befinde sich auser ihr ein Gewicht S, davon ein Perpendikel auf die Ebene gefällt SQ sey. Vermittelst dieses Perpendikels, das weder seine Länge noch seine Lage verändern kann, sey das Gewicht mit der Ebene verbunden, so daß sich eines ohne das andere nicht bewegen kann (wie etwa wenn sich S am Ende einer Stange befände, die in Q fest stäcke). Unter diesen Umständen wird die Ebene um eine wagrechte Axe CG, die auf sie senkrecht steht, sich eben so schwingen, als ob das Gewicht in Q wäre.

Bew. Man nehme CG = QS. Das Bestreben des Gewichtes S zur Bewegung kömmt darauf an das Rechteck CS um die Axe CG zu drehen. Es ist aber klar, daß hiezu einerley Gewalt nöthig ist, sie mag in welcher Stelle der Linie SQ man will angebracht werden, denn die Länge des Hebels, an dem die Gewalt angebracht wird, bleibt allemahl = GS, und sonst ändert sich auch nichts. Also kann man annehmen diese Gewalt sey in Q.

23. Zus. Wenn QO in der Ebene MBP parallel mit PB ist, und sich in der Ebene SQO wo man will Gewichte befinden, so schwingen solche sich zusammen um CG, als ob sie sich in QO, jedes an der Stelle, wo das Perpendikel von ihm auf QO trifft, befänden.

24. Zus. Wäre QP = o, daß QO mit BP zusammen fiele, so gäbe dieß eine schwere Ebene BSP 28. Fig. die auf BMP senkrecht wäre, aber die Axe CG,

CG, um die sie sich schwingt, in sich enthielte. Diese Ebene BSP, schwänge sich nähmlich so, daß BMP, der ich jetzo kein Gewicht gebe, beständig auf ihr senkrecht bliebe, sich selbst aber in der verticalen Fläche schwänge, die auf CG senkrecht ist. Ist nun SP ein Perpendikel von einem willkührlichen Puncte der Figur BSP, auf BP, so bleibt diese SP beym Schwingen der Axe CG beständig parallel und in einerley Entfernung von ihr. Die Figur BSP aber schwingt sich eben so wie sich die Linie BP schwingen würde, wenn sie in jedem Elemente Pp, das Gewicht des Elements PS der Figur hätte.

25. Erkl. Von der Ebene BMP, die sich in einer auf die Axe des Schwunges senkrechten Ebene schwingt (18), sagt man sie schwinge sich nach der Seite (in latus), aber von BSP, in der sich die Axe des Schwunges selbst befindet (24), heißt es: sie schwinge sich nach der Fläche (in planum).

Den Unterschied leichter zu merken, bedencke man, daß wenn die Luft wiedersteht, jene Schwingungen den geringsten, diese den stärksten Widerstand finden, oder, mich eines kriegerischen Gleichnisses zu bedienen, daß eben der Unterschied ist, ob man mit einem breiten Degen hauet, oder fuchtelt.

26. Aufg. Wenn sich eine Figur nach der Fläche schwingt, deren Hälfte BSP ist, so daß sich auf der andern Seite von BP eine ähnliche Hälfte befindet, den Mittelpunct des Schwunges zu finden.

Aufl. Es sey CB = e, BP = x, PS = y, weil man sich jedes Gewicht ydx vorstellen kann, als

wäre

wäre es in P beysammen, so ist die Summe der Producte aus jedem Gewichte in das Quadrat seiner Entfernung von c; $=\int(x+e)^2 . ydx$ welche für die ganze Figur verdoppelt werden muß. Daher wird die Länge des einfachen Pendels, das sich in gleichen Zeiten mit dieser Ebene schwingt, die ich α nennen will $\alpha = \frac{\int(x+e)^2 . ydx}{\int(x+e) . ydx}$.

27. Zus. Wenn die Figuren in 26; und 18. einerley sind, so ist $a-\alpha = \frac{\frac{1}{3}\int y^3 dx}{\int(x+e)\, y\, dx}$.

28. Exempel. Für das Rechteck (20) ist

$$\alpha = \frac{\frac{2}{3}\left[(x+e)^3 - e^3\right]}{(x+e)^2 - e^2}.$$

29. Für den Kreis (21) ist

$$\alpha = \frac{\int(x+e)^2 . r(2rx-x^2)\,dx}{1(x+e) . r(2rx-x^2)\,dx}.$$

Dieses wird aus 21. leicht gefunden, und ist

$$\left.\begin{array}{l} \int e^2\, u\, dx = \frac{e^2 r^2}{2} \\ \int 2ex\, u\, dx = er^3 \\ \int x^2 u\, dx = \frac{5}{8} r^4 \end{array}\right| \mathfrak{B} \sin\frac{u}{r} + \left(\frac{e^2 x}{2} - \frac{e^2 r}{2}\right) . u + \left(\frac{2}{3} ex^2 - \frac{1}{3} rex - r^2 e\right) . u + \left(\frac{1}{4} x^3 - \frac{1}{12} rx^2 - \frac{5}{24} r^2 x - \frac{5}{8} r^3\right) u$$

Für den Zähler. Der Nenner bleibt wie in 21.

Für den ganzen Kreis ist $\alpha = \frac{4e^2 + 8er + 5r^2}{4\,(e+r)}$.

30. Aufg. Die Linie BM 29. F., um die Axe BP gedreht, beschreibt einen runden Körper, der sich um

um die Axe CG schwingt. Man sucht für ihn den Mittelpunct des Schwunges.

Aufl. I. MBP sey die Figur, die den Körper beschreibt, in der Lage, daß die Axe des Schwunges CG auf sie senkrecht steht: SBP sey diese Figur in einer andern unbestimmten Lage, wo der Punct M in S gekommen, also SP = MP ist. So haben die unendlich nahen Puncte M, m, ein Paar Kreisbogen MS, ms, beschrieben, und zwischen den Ebenen MPS, mps ist ein unendlich schmahles Stück des Körpers enthalten.

II. Man fälle SL auf die Ebene MBP senkrecht, SΣ sey ein Element des Bogens MS, und ΣΛ mit SL parallel, die Puncte L, Λ, sind in MP (Geom. 47. S. 2. Zus.). Ist sσ das ähnliche Element des Bogens ms, und stellt man sich durch s, σ, Parallelen mit SL vor, die in mp eintreffen werden, so gibt sich ein Prisma, dessen obere Grundfläche SLΛΣ, die untere ihr gleich und ähnlich, die Höhe = Pp ist. Die Seitenflächen sind, ebene Flächen durch ΛΣ, LS, LΛ, auf die Ebene mBp senkrecht, und die krumme Fläche des Körpers SΣσs.

III. Dieses Prisma kann man als ein Gewicht ansehen, das sich auf der Ebene BMP, in L befände (22). Man finde also die Summe aller Producte aus jedem solchen Prisma in CL^2. Sie ist der Zähler von a (17); der Nenner ist ein Product aus dem Gewichte des Körpers in seines Schwerpunctes Entfernung von C.

IIII. Es sey CB = e, BP = x, PM = y, ML = u, also LΛ = du, LS = $r(2yu-u^2)$ so ist das Prisma (II) = $r(2yu-u^2)$. du. dx und sein Product in CB^2 wird

$[(x+e)^2+(y-u)^2]$. $r(2yu-u^2)$. du. dx.

V. Dieses integrire man so, daß y, x, dx, als unveränderlich angesehen werden, und das Integral für u = o verschwindet. So hat man die Summe aller Producte, deren Prismata zwischen den ebenen Flächen MPS, mpf, MPpm, SPpf, und der krummen MSfm enthalten sind. Denn für alle diese Prismata bleibt einerley y, x, dx.

VI. In diesem Integrale setze man u = 2y. So hat man die Summe aller solcher Producte, wenn BSP mit BMP in einer Ebene auf die Linie BP andere Seite fällt, so daß MBP und PBS zusammen die ganze ebene Figur ausmachen, die durch BP in ähnliche Hälften getheilt wird.

VII. Die in VI. gefundene Formel integrire man so, daß x, y, nun veränderlich sind, und das Integral für x = o verschwindet; So hat man die Summe aller solcher Producte, deren Prismen auf einer Seite der ebenen Figur liegen, davon BMP die Hälfte ist.

VIII. Aber diese Prismen machen die Hälfte des Innhalts des Körpers aus, und die Producte sind auf einer Seite der VII. genannten Figur wie auf der andern. Für den ganzen Körper also verdopple man VII. so hat man die Summe aller Producte aus jedem Gewichte in das Quadrat seiner

Ent-

Entfernung, oder den Zähler (III). Der Nenner ist aus der Lehre vom Schwerpuncte bekannt.

VIIII. Das Differential IIII. mit Beyseitesetzung des beständigen Factors dx, giebt

$[(x+e)^2+y^2]$. LS. du
$-2yu$. LS. du
$+u^2$. LS. du

Für alle drey Theile ist in

II. 31	u	b	x
hier	LS	2y	u

Für den letzten Theil ist

II; 31	$\varkappa$	μ	ζ
hier	2	$\frac{5}{16}$	$-\frac{5}{2}y^2-\frac{5y}{6}$. LS $-\frac{1}{15}$. LS^2

II; 31	λ	η
hier	$\frac{35}{128}$	$-\frac{35y^3}{8}-\frac{35y^2.LS}{24}-\frac{7y}{12}LS^2-\frac{LS^3}{4}$

und das Integral

$$\tfrac{5}{8}y^4.\mathfrak{B}\sin\frac{LS}{y}+(\tfrac{1}{4}LS^3+\tfrac{1}{16}y.LS^2-\tfrac{35}{24}y^2.LS-\tfrac{5}{8}y^3).LS$$

welches wie seyn soll, für $u=o$ verschwindet.

Für des zweyten Theils veränderlichen Factor u. LS. du ist

II; 31	$\varkappa$	μ	ζ
hier	1	$\frac{3}{8}$	$-\frac{3}{2}y-\frac{LS}{2}$

II; 31	λ	η
hier	$\frac{15}{16}$	$-\frac{5}{2}y^2-\frac{5yu}{6}-\frac{5}{3}u^2$

Das

Das Integral

$$\tfrac{1}{2}y^3 . \mathfrak{B}\sin\frac{LS}{y} + (\tfrac{1}{3}LS^2 - \tfrac{1}{6}y.LS - \tfrac{1}{2}y^2).LS$$

also des eigentlichen zweyten Theils Integral, dieses mit $-2y$ multiplicirt, oder

$$-y^4 . \mathfrak{B}\sin\frac{LS}{y} - (\tfrac{1}{3}.LS^2 - \tfrac{1}{6}y.LS - \tfrac{1}{2}y^2).2y.LS$$

Eben so liesse sich das Integral von LS. du finden, da es aber der Abschnitt des Kreises MLS ist, so ist es $= \tfrac{1}{2}y.y\mathfrak{B}\sin\frac{LS}{y} - \frac{LS.(y-u)}{2}$. Also des ersten Theils Integral $[(x+e)^2 + y^2).\frac{y^2}{2}.\mathfrak{B}\sin\frac{LS}{y} - [(x+e)^2 + y^2].\frac{LS.(y-u)}{2}$.

Jedes dieser drey Integrale verschwindet für $u = o$.

X. Setzt man nun nach VI; $u = 2y$, so wird $\mathfrak{B}\sin\frac{LS}{y} = \pi$, nähmlich der halben Peripherie, wenn 1 der Halbmesser ist; denn die verschwindende LS gehört hier als Ordinate zu der Abscisse, die dem Durchmesser gleich ist.

XI. So fallen also alle blos algebraischen Theile aus den Integralen weg, und die, welche den Kreisbogen enthalten, zusammen addirt, geben $[\frac{1}{2}(x+e)^2.y^2 + \frac{1}{8}y^4].\pi$.

XII.

XII. Also ist der Zähler (VIII.)
$(\int x^2y^2dx + 2\int exy^2dx + \int e^2y^2dx + \frac{1}{4}\int y^4dx).\ \pi.$

XIII. Der Nenner wird aus An. Un. 648;
$\pi.\int y^2.(x+e)\ dx.$

XIIII. Folglich

$$a = \frac{\int x^2y^2dx + 2\int exy^2dx + \int e^2y^2dx + \frac{1}{4}\int y^4\,dx}{\int y^2.(x+e).\ dx}$$

XV. Exempel. Es sey der Körper ein Stück einer Kugel, vom Halbmesser r; so daß B der Pol des Kreises den PM beschreibt sey. So ist $y^2 = 2rx - x^2$

Des Zählers Differential ist
$(2e^2rx + (r^2 + 4er - e^2)x^2 + (r - 2e)x^3 - \frac{3}{4}x^4).\ dx$

Des Nenners seines ist
$(2rex - e\ \}x^2 - x^3).\ dx$
$\quad + 2r\ \}$

Beyde also integrirt, wird

$$a = \frac{e^2r + \frac{1}{3}.(r^2 + 4er - e^2)x + \frac{1}{4}(r - 2e)x^2 - \frac{3}{20}x^3}{re + \frac{1}{3}.(2r - e).\ x - \frac{1}{4}x^2}$$

Für die ganze Kugel ist $x = 2r$, und

$$a = \frac{7r^2 + 10er + 5e^2}{5.(r+e)}.$$

31. Anm. Der Erfinder dieser Lehre, Huygens gründete sie auf eine Voraussetzung, die nicht allen offenbahr genug zu einer Voraussetzung vorkam. Man kann sie im Horol. osc. P. IIII. hypoth. 1. sehen. Jacob Bernoulli leitete diese Untersuchungen aus dem Hebel her. Mem. de l'Ac. des Sc. 1703. Op. Iac. Bern. n. 98, vermöge eines Verfahrens, das sich ohne grosse Weitläuftigkeit nicht wohl anders anbringen läßt, als bey ebenen oder körperlichen

Figuren, die von einem Durchmesser, wie BP in den zuletzt gebrauchten Zeichnungen ist, oder durch eine solche Ebene, in ähnliche Hälften getheilt werden. Johann Bernoullin gelang es hier, wie bey andern Gegenständen, die er zugleich mit seinem ältern Bruder betrachtet hat, die Sache allgemeiner und leichter abzuhandeln. Er hat es 1714. in den Leipziger Actis Eruditorum, und den pariser Memoires der Ak. der Wiss. bekannt gemacht. Op. Io. Bern. T. II. n. 96. Aber im IIII Th. seiner Wercke 177. N. 9. Absatze steht das, was ich hier (17) zum Grunde gelegt habe, so wie das, wovon ich in (1) den Anfang mache, in den vorhergehenden Absätzen ausgeführt ist. Die Formeln in 18; 26; 30; finden sich beym Jacob Bernoulli a. a. O. nur daß bey ihm e = o ist. Er hat auch verschiedene Exempel dieser Aufgaben, in drey Tafeln gesammlet. Die leichtesten dieser Exempel findet man in den Wolfischen elementis mechanicae §. 433. sqq. berechnet, das etwas schwerere aber vom Kreise (21; 29) ist da nicht berührt. Es ist noch übrig, daß ich die hieher gehörigen Lehren, welche bey den Pendeluhren wirklich gebraucht werden, vortrage. Sie finden sich in Huygens oft angeführtem Buche P. IIII. Pr. 23. sequ.

32. Aufg. Den Mittelpunct des Schwunges eines sehr schmalen und dünnen Prisma zu finden, dessen Länge CD 30. Fig. wäre, wenn es in C aufgehenkt ist.

Aufl. Die Ebene, welche das Prisma, senkrecht auf CD durchschnitten gibt, sey = B; ferner CP = x. Das Prisma läßt sich in Elemente zerlegen, deren jedes zwischen ein paar unendlich nahen Durchschnitten enthalten, also Bdx ist. Und weil das Prisma schmal und dünne angenommen wird, so ist die Fläche B sehr klein, und kann ohne merklichen Irrthum für einen Punct angenommen wer-

den,

den, also ist x die Entfernung des Elements von C; und sein Moment der Trägheit (3) $x^2 . Bdx$ Des Prisma Schwerpunct ist von C um die Weite $\frac{1}{2}x$ entfernt, und sein Gewicht ist B. x. Also ist

$$a = \frac{\int x^2 . Bdx}{\frac{1}{2} . Bx} = \frac{2}{3} Bx^3$$

33. Anm. Diese Auflösung ist zum Gebrauche zulänglich, da bey den Uhren, die Pendelstange ein Stab ist, der in Vergleichung mit seiner Länge wenig Breite und Dicke hat. Wollte man die Untersuchung allgemeiner anstellen, so müßte man das Prisma in Elemente zerlegen, deren Momente der Trägheit sich nicht so leicht angeben, und summiren liessen. Es müßte ein Verfahren ohngefähr wie bey den runden Körpern (30) angestellt werden, weil aber hier eine Bequemlichkeit, die der Begriff des runden gab, wegfällt, müßte man die Lage eines solchen Elements des Prisma, durch drey Coordinaten, wie in Anal. endl. Gr. 516. bestimmen. So könnte man die Untersuchung für jeden gegebenen Körper anstellen. Es scheint mir aber, wenigstens in Anfangsgründen, überflüssig, sich in die hiezu nöthige Weitläuftigkeit einzulassen, da mir kein Gebrauch davon in der Ausübung bekannt ist.

34. Aufg. An diesem Prisma (32) befinde sich nun noch ein Gewicht in D, fest, dasselbe nehme einen sehr kleinen Raum ein, daß man alle Entfernungen jeder Stelle dieses Gewichtes von C; = CD setzen kann. Man sucht den Mittelpunct des Schwunges, für diese Pendelstange mit der daran in D befindlichen Linse. D bedeutet also der Linse Schwerpunct.

Aufl. I. Das Gewicht der Pendelstange heisse b, ihre Länge CD sey = f. Das in D befindliche Ge-

wicht heisse C. Man suche zuerst den Zähler von a.

Die Summe aller Producte aus jedem kleinen Gewichte, in das sich CD theilen läßt, in das Quadrat seiner Entfernung ist $\frac{1}{3}$. b. f^2 (33). Die Entfernung jedes Theiles, aus denen das Gewicht in D besteht, von C, ist = CD = f, man nehme die Theile alle von gleicher Schwere an, und ihre Menge sey = n, daß eines jeden Gewicht = $\frac{c}{n}$, so ist jedes solche Product = $f^2 . \frac{c}{n}$, und weil ihre Menge = n ist, so ist aller Summe = f^2. c.

Also ist der gesuchte Zähler = $f^2 . (\frac{1}{3} b + c)$.

Der Nenner ist die Summe der Momente, welche das Prisma CD, und das Gewicht in D geben, wenn man sie als an einem Hebel, dessen Unterlage in C wäre angebracht, betrachtet. Er ist also = $\frac{1}{2} f. b + f. c.$

$$\text{Folglich } a = \frac{\frac{1}{3} b + c}{\frac{1}{2} b + c} . f = \frac{2b + 6c}{3b + 6c} . f$$

35. I. Zus. $f = \frac{6c + 3b}{6c + 2b} . a = (1 + \frac{b}{6c + 2b})\ a$

Also ist allemahl f länger als a. Der Ueberschuß der Länge der Pendelstange über die Länge des einfachen Pendels, beträgt aber desto weniger, je grösser c in Vergleichung mit b, je schwerer die Linse in Vergleichung mit der Pendelstange ist.

II. Zus.

II. Zus. Wenn man die Gewichte b, c, und die Länge f, hat, so läßt sich daraus a finden, und so wird begreiflich werden, wie sich die Länge des einfachen Secundenpendels, vermöge einer gewöhnlichen Pendeluhr, wo das Pendel kein einfaches seyn kann, finden liesse.

III. Anm. Bey diesen Uhren hängt das Pendel insgemein nicht unmittelbar an C, sondern an einem dünnen elastischen Bleche, das über C hinausgehet, und vermittelst dessen das Pendel sich verlängern und verkürzen läßt. Auch geht die Pendelstange ein wenig unter dem Gewichte D hinaus, das sich auch an ihr verschieben läßt. Wer diese Kleinigkeiten berechnen wollte, würde solches nach der vorhergehenden Anleitung leicht thun können, ob es gleich der Mühe kaum werth seyn dürfte.

36. Zus. Sollte in E noch ein kleines Gewicht $= k$, da $CE = h$ wäre, angebracht werden, so sey für dieses Pendel p die Länge des einfachen, das seine Schwünge in eben der Zeit macht, und es ist

$$p = \frac{\frac{1}{3}bf^2 + f^2c + h^2k}{\frac{1}{2}fb + fc + hk}$$

$$= \frac{2bf^2 + 6f^2c + 6h^2.k}{3fb + 6fc + 6hk}$$

Wollte man dieses kleine Gewicht verschieben, das untere aber unbeweglich lassen, so liesse sich dadurch die Bewegung des ganzen Pendels so einrichten, daß die Schwünge in gegebener Zeit geschähen. Man suchte nähmlich wie groß h für ein gegebenes p seyn müßte. So fände sich

$$h = \frac{1}{2}p \pm r\left(\frac{1}{4}p^2 + \frac{\frac{1}{2}pfb + pfc - \frac{1}{3}bf^2 - fc^2}{k}\right)$$

Soll es hier zwo Stellen unter C geben, wo sich das Gewicht k anbringen läßt, so müssen beyde Werthe von CE bejaht seyn, also muß $pf.(\frac{1}{2}b+c) < f^2.(\frac{1}{3}b+c)$ seyn, daraus folgt, daß p kleiner seyn muß, als die Länge des einfachen Pendels für (34).

Wenn man von C die gehörige Länge für $\frac{1}{2}a$ nimmt, so sind von dem Puncte der sich solchergestalt giebt, die beyden Stellen für E, gleichweit entfernt, eine darüber, die andere darunter.

Diese Entfernung beträgt viel oder wenig, nachdem p viel oder wenig von f unterschieden seyn soll.

Soll die Aufgabe möglich seyn, so muß was unter dem Wurzelzeichen steht, nicht verneint seyn, also ist $\frac{1}{4}p^2k+(\frac{1}{2}b+c).fp=(\frac{1}{3}b+c)f^2+gf^2$ wo g nicht verneint seyn darf.

Daraus folgt

$$p=-\frac{f.(b+2c)}{k}$$

$$\pm\frac{f}{k}\sqrt{(b+2c)^2+4k.(\tfrac{1}{3}b+c+g)}$$

Weil p doch bejaht seyn soll, muß man das obere Zeichen vor der Wurzelgrösse brauchen.

Die Stelle des Gewichts E zu finden, wo es macht, daß das Pendel am geschwindesten geht, setze man p so klein, als es werden kann (II. Abschn. 43), das ist $g=o$. Folglich

$$p=\frac{f}{k}.(\sqrt{[(b+c)^2+4k.(\tfrac{1}{3}b+c)]}-b-2c)$$

oder

oder auch $\frac{1}{4}p^2k + (\frac{1}{2}b + c)fp = (\frac{1}{3}b + c)f^2$
woraus $h = \frac{1}{2}p$ folgt.

37. Aufg. CB 29. Fig. ist ein dünner Faden, oder eine dünne Stange, da man aber das Gewicht mit in Betrachtung zieht: daran hängt an B eine Kugel. Man sucht den Mittelpunct des Schwunges für dieses aus einer Stange und einer Kugel zusammengesetzte Pendel.

Aufl. I. Man kann also CB als ein Prisma ansehen, dessen Durchschnitt in der Weite w von C, die Fläche M habe. So ist das dasige Element dieses Prisma $= M.\,dw$, und weil das Prisma dünne, ist w die Weite jeder Stelle dieses Elements von C; also das Product aus dem Quadrate dieser Weite in das Element $= w^2 Mdw$.

II. Die Summe dieser Producte, so genommen, daß sie für $w = o$ verschwindet, und alsdenn $w = e$ gesetzt; dazu aber die Summe der Producte aus allen Elementen der Kugel in die Quadrate ihrer Entfernungen von C addirt, gibt den Zähler von a in (30).

III. Die erste dieser beyden Summen ist $\frac{1}{3}Me^3$.

IIII. Die zweyte hat man schon in 30. XV. gefunden, sie steht aber dorten nicht einzeln ausgedruckt. Um die dortige Rechnung hier so viel als möglich zu nutzen, überlege man, daß gegenwärtige zweyte Summe, das Integral von dem ist, was dorten des Zählers Differential heißt, nur daß solches noch mit π multiplicirt werden muß, denn in

dem Ausdrucke für a (30; XIIII.) hob sich π im Zähler und Nenner auf, weil man dorten die Masse von e nicht betrachtete; da dieses hier anders ist, so muß man den dortigen Zähler von a hier so nehmen, wie er (30; XII.) genommen wird, wo π noch in ihm ist.

V. Also ist das Differential der zweyten Summe, die ich hier suche

$$(2e^2rx+(r^2+4er-e^2)x^2+(r-2e)x^3-\tfrac{3}{4}x^4).\pi dx$$

VI. Dieß integrirt, daß es für $x=o$ verschwindet, und im Integral $x=2r$ gesetzt, gibt die verlangte zweyte Summe: $(\frac{1}{3}e^2+\frac{2}{3}er+\frac{7}{15}r^2).4r^3\pi$.

VII. Die Summen III. und VI. zusammen, geben den Zähler des hiesigen a.

VIII. Die Gewichte des Prisma und der Kugel, sind Me und $\frac{4r^3\pi}{3}$; ihre Schwerpuncte von C um $\frac{1}{2}e$ und um $e+r$ entfernt. Also ist das Moment ihrer Summe oder nach (17) der Nenner von a;

$$\tfrac{1}{2}Me^2+\frac{4r^3.}{3}(e+r).\pi.$$

VIIII. Folglich

$$a=\frac{\frac{1}{3}Me^3+(\frac{1}{3}e^2+\frac{2}{3}er+\frac{7}{15}r^2).4r^3\pi}{\frac{1}{2}Me^2+\frac{4}{3}.r^3.(e+r).\pi}$$

X. Dieses giebt wie gehörig für $M.e=o$ den Werth 30; XV.

XI.

XI. Das Gewicht des Prisma Me sey = V, der Kugel ihres $\frac{4r^3\pi}{3} = P$ so ist

$$a = \frac{\frac{1}{3}Ve^2 + (e^2 + 2er + \frac{7}{5}r^2)P}{\frac{1}{2}Ve + (e+r)P}$$

XII. Also $a - (r+e)$

$$= \frac{\frac{2}{5}r^2P - \frac{1}{6}Ve^2 - \frac{1}{2}Ver}{\frac{1}{2}Ve + (e+r)P}$$

Um so viel ist der Mittelpunct des Schwunges, unter der Kugel Mittelpuncte.

XIII. Diese Formel ist einerley mit der, welche de la Lande Exposition du calcul Astronomique art. 252. aus den Mem. de l'Ac. des Sc. 1735. gibt. Sein P, u, b, a, sind bey mir P, V, r, r + e, denn es ist vermuthlich ein Druckfehler, daß b den Durchmesser der Kugel bedeuten sollte, da sich seine Formel völlig in meine verwandelt, wenn man es für den Halbmesser annimmt. In der Astronomie braucht man zuweilen ein solches Pendul, wenn man Beobachtungen an einem Orte anstellen muß, wo man die Uhr nicht bequem in der Nähe haben kann. Die Regeln, die de la Lande a. a. O. giebt, wenn man die Grösse der Kugel, oder das Gewicht des Fadens beyseit setzen wollte, sind hier 34. und 30. XV. Auch ist für V = o in XII. hier, a − $(r+e) = \frac{2r}{5\cdot(r+e)}\cdot r$, also desto kleiner, je kleiner r in Vergleichung mit e ist.

XIIII. Anm. Wenn der Ausdruck (XII) verneint wird, so fällt der Mittelpunct des Schwunges über der Kugel ihren. Dieses geschieht allemahl wenn $r = o$, da ist $r + e - a = \frac{Ve}{3V + 6P}$ Wenn man a aus XI. für $r = o$ sucht, und denn hier e durch a ausdrückt, so gibt dieses einerley mit $f - a$ (35; I.) wie sich gebührt. Die dortigen f, b, c, sind hier $r + e$; V; P.

Von der Ueberwucht
Stat. 151.

38. Vorerinnerung. Kräfte, mit denen Maschinen bewegt werden (Stat. 114.), können von verschiedener Gattung seyn, und richten sich nicht allemahl nach ihren Massen. So kann eine Feder bey einer geringen Masse eine starke bewegende Kraft haben. Gesetzt, eine mathematische Stange CA, die sich um C 22. F. drehen liesse, würde in B von einem Gewichte nach Bb, in A von einer Feder nach aA getrieben, so daß Feder und Gewicht einander entgegengesetzt in die Stange wirkten. Wenn sie einander nicht blos erhalten, sondern eines, z. E. die Feder, die Ueberwucht erhält, die Stange fortschiebt, und damit das Gewicht erhebt, so erhellt, daß man die ganze Kraft der Feder, als eine bewegende wie m (1) ansehen kann, daß diese bewegende Kraft sowohl die eigene Masse der Feder mit fortführt, als die bewegende Kraft des Gewichts zu überwältigen hat. Man muß also bey A die bewegende Kraft, und die Masse, bey welcher diese Kraft befindet, jedes besonders betrachten; und

eben

eben dieß muß auch bey B geschehen, wenn die Untersuchung so allgemein seyn soll, daß sie auch solche Fälle enthält, wo B durch andere Kräfte als durch ein Gewicht getrieben wird.

39. Aufg. BOA sey ein mathematischer Hebel 31. F., der sich um O drehen läßt. In A sey an ihm eine Masse P befestiget, die ich als blos träg betrachte, und eine bewegende Kraft $=p$ treibe A nach einer auf CA senkrechten Richtung; dergleichen Masse und bewegende Kraft in B sind Q, q, die bewegenden Kräfte aber wollen den Hebel nach verschiedenen Seiten drehen. Man setze die in A ist stärker, und bringt den Hebel in die Lage $\alpha O\beta$, es versteht sich, daß man die Bewegung in einer unendlich kleinen Zeit $=dt$ betrachtet, und also den Winkel $\alpha OA = \beta OB$ unendlich klein annimmt. Man sucht die beschleunigende Kraft, mit welcher A bewegt wird.

Aufl. Weil man die bewegenden Kräfte p, q, als Gewichte ansehen kann (Stat. 24.), und p den Hebel niederwärts, q aufwärts drehen will, so suche man, was für eine bewegende Kraft in A angebracht, den Hebel so stark drehen würde, als ihn q in B angebracht, drehet. Diese gesuchte bewegende Kraft müßte nähmlich mit q einerley Moment haben, sie wäre also $= \frac{q.b}{a}$ (Stat. 37). Es ist also einerley, ob p an A und q an B den Hebel drehen, oder ob jene bliebe, statt dieser aber an A eine

Gewalt

Gewalt $\frac{qb}{a}$ der Richtung, nach welcher p wirkt, entgegengesetzt, angebracht würde. Die Gewalt also, mit welcher A niederwärts getrieben wird, ist $p-\frac{qb}{a}=\frac{pa-qb}{a}$ oder der Unterschied der statischen Momente (Stat. 37.), mit a dividirt.

Dieß ist als die bewegende Kraft an A anzusehen, wenn beyde Kräfte q, p, zugleich auf die erwähnte Art wirken. Wenn man es also mit der Masse dividirt, welche davon bewegt wird, so hat man die beschleunigende Kraft. Diese Masse ist P in A und Q in B, oder statt der letzten eine gleichgültige in A, die man aus (3) fände. Es sind nähmlich

dorten	B	q	p	P
hier	Q	b	a	$\frac{b^2}{a^2}Q$

Man hat also $\frac{pa-qb}{a}$ als eine bewegende Kraft anzusehen, welche die Masse $P+\frac{b^2}{a^2}Q$ fortführt.

Folglich ist die beschleunigende Kraft $\frac{(pa-qb)\,a}{a^2.P+b^2.Q}$.

40. Zus. Die Geschwindigkeit, welche in einer unendlich kleinen Zeit in A entsteht, ist (I; 72.) $\frac{pa-qb}{a^2P+b^2Q}$ adt; damit wird von der überwiegenden

genden Kraft der Raum Aα beschrieben. In gleicher Zeit aber beschreibt B, oder die Last (Stat. 51) den Raum $B\beta = \frac{b}{a} . A\alpha$; und hat also die Geschwindigkeit $\frac{pab - qb^2}{a^2 P + b^2 Q} dt$.

41. Aufg. Nun sey der Hebel ein schweres sehr dünnes Prisma, dessen Seitenflächen mit den Grundflächen rechte Winkel machen, sein Schwerpunct sey Z, und sein Gewicht = V. Man sucht wieder die beschleunigende Kraft in A.

Aufl. I. Vorläufig erhellt, daß V sowohl die Masse des Hebels, als sein Gewicht bedeutet, im letzten Falle nähmlich muß man sich die Masse V mit der Schwere, welche = 1 gesetzt wird, multiplicirt vorstellen.

II. Man wird also folgendes zu suchen haben, 1) wie groß die bewegende Kraft in A ist? 2) was sie da für eine Masse zu bewegen hat?

III. Auf die erste Frage heißt die Antwort $\frac{pa - qb - V.OZ}{a}$ (Stat. 51.) $= \frac{pa - qb - V.e}{a}$ wenn $OZ = e$.

IIII. Die andere Frage läßt sich so beantworten: die Masse, welche in A, den Massen P, Q, und V, zusammen gleichgültig seyn soll, muß ein Moment der Trägheit haben, das den drey Momenten der Trägheit dieser drey Massen zusammen gleichet

chet (3). Die beyden ersten sind $P + \frac{Qb^2}{a^2}$; man muß also nur noch das dritte suchen

V. Die Untersuchung allgemeiner zu machen, soll die Länge des Hebels nicht nothwendig $BA = b + a$, sondern $= l$ seyn, so daß er sich wo nöthig über B hinaus erstrecken kann, wenn Z wie in der Figur zwischen O und B liegt, und $a > b$. Es ist nähmlich wegen seiner prismatischen Gestalt $AZ = \frac{1}{2} l$, wenn das eine Ende des Hebels in A ist.

VI. K heisse ein Querschnitt des Hebels oder ein Durchschnitt mit seiner Grundfläche parallel, in einer unbestimmten Weite $OK = w$ von O. Ihm unendlich nahe werde ein anderer Querschnitt gemacht, so enthalten beyde zwischen sich ein Element des Hebels Kdw.

VII. Weil der Hebel sehr dünn seyn soll, so ist eine Linie, die von O nach irgend einer Stelle des Querschnittes, der O am nächsten liegt, gezogen wird, nur unmerklich länger als OZ, und eben so ist es mit jeder Linie nach irgend einer andern Stelle des Elements (VI) beschaffen. Also ist das Moment der Trägheit dieses Elements $= Kw^2 dw$.

VIII. Das Integral davon $\frac{Kw^3}{3}$ verschwindet für $w = o$, und gibt also die Summe der Momente der Trägheit, aller Elemente die von O nach K liegen, oder das Moment der Trägheit des Stücks OK.

VIIII. Also $w = \frac{1}{2}l + e$ gesetzt, des Theiles, der sich von O ans Ende nach der Seite B zu erstreckt, und $w = OA = \frac{1}{2}l - e$ gesetzt, des Theiles OA. Man begreift leicht, daß Linien, die von O nach entgegengesetzten Seiten zugehen, hier nicht als bejaht und verneint betrachtet werden, weil es bey einer blos trägen Masse keinen Unterschied macht, ob sie sich auf einer oder der andern Seite der Unterlage befindet; der Masse Kdw nähmlich ist in A einerley Masse gleichgültig, jene mag sich um die Weite w von O nach B oder nach A zu befinden (3).

X. Des ganzen Hebels Moment der Trägheit ist also $\frac{1}{3}K[(\frac{1}{2}l+e)^3+(\frac{1}{2}l-e)^3] = \frac{1}{3}Kl.(\frac{1}{4}l^2 + 3e^2) = \frac{V.l^2}{12} + Kle^2$ weil $K.l = V$.

XI. Den drey Massen (IIII) ist also in A die Masse $\frac{\frac{1}{12}V.l^2 + Kle^2}{a^2} + \frac{Qb^2}{a^2} + P$ gleichgültig.

XII. Folglich die beschleunigende Kraft daselbst $= \frac{(pa - qb - Ve).a}{\frac{1}{12}V.l^2 + K.l.e^2 + Qb^2 + Pa^2}$.

42. Zus. Ist die Unterlage im Schwerpuncte, also $e = o$, so ist $\frac{1}{2}l = a$ (41. VIIII.) und des Hebels Moment der Trägheit $\frac{V.a^2}{3}$ und die beschleunigende Kraft $= \frac{(pa - qb)\,a}{\frac{1}{3}Va^2 + Qb^2 + Pa^2}$. Sie giebt, mit dt multiplicirt, die Geschwindigkeit des Puncts

ctes A, und dieſe mit $\frac{b}{a}$ multipl., die Geſchwindigkeit des Punctes B oder der Laſt $= \frac{(pab - qb^2).\ dt}{\frac{1}{3}a^2 V + a^2 P + a^2 Q}$.

43. Zuſ. Man ſetze, der Hebel reibt ſich etwa in den Zapfen, um die er ſich an O drehen müßte; So erhellt, daß dieſes Reiben für ſich allein eine gewiſſe bewegende Kraft an A, aufhalten könnte. Ich will ſoviel ſagen: wenn der Hebel blos mathematiſch wäre, und weder die Maſſen Q, P, noch die bewegende Kräfte q, p, an ihm wären, ſo würde man in A eine gewiſſe bewegende Kraft die ich $= \Phi$ ſetzen will, anbringen könne, die genau von dem Reiben erhalten würde, und alſo den Hebel noch nicht drehte, aber wenn ſie im geringſten verſtärkt würde, ihn drehen würde. Es iſt alſo klar, daß man dieſe Kraft von p abrechnen muß, oder daß p an einem Hebel, der ſich reibt, nicht mehr thut als $p - \Phi$ an einem Hebel, der ſich nicht reibt, thun würde. Bey dem Hebel, der ſich reibt, muß man alſo $p - \Phi$ ſtatt des p ſchreiben, das man vorhin am Hebel, der ſich nicht reibt, gebraucht hatte. So wird die beſchleunigende Kraft (42) $\frac{(p - \Phi)\, a^2 - qba}{\frac{1}{3}a^2 V + a^2 P + b^2 Q}$ und die Geſchwindigkeit der Laſt (42) $\frac{[(p - \Phi)\, b - qb^2]\, dt}{\frac{1}{3}a^2 V + a^2 P + b^2 Q}$.

44. Zuſ. Ob der Laſt Geſchwindigkeit, bejaht, o, oder verneint iſt, ſieht man aus derſelben Zäh-

ler.

ler. Im ersten Fall geht es, wie die Figur und die bisherige Untersuchung ausdrückt; Im zweyten ist ein Gleichgewicht; im dritten überwiegt die Last, und geht nach der Richtung, die der Bß entgegengesetzt ist.

45. Zus. Hätte die Last keine bewegende Kraft, nur ihre Trägheit, so wäre $q = o$, und die Kraft braucht überwiegend zu seyn, weiter nichts als daß $p \gtrsim \Phi$.

Dieses fände statt, wenn Q wie auf einem Tische, fortgeschoben würde, da hat man nur mit ihrer Trägheit zu thun, ihre Schwere würde von dem Tische getragen. Wäre der Tisch nicht vollkommen glatt, daß sich Q auf ihm riebe, so käme dieß mit zu Φ.

46. Zus. Bey P, mit dem die bewegende Kraft p verbunden ist, könnte die Betrachtung der Trägheit wegfallen, wie wenn Wind oder Wasser auf den Hebel in A stiesse, oder eine Feder, deren Masse gering wäre, da in ihn wirkte. Alsdenn wäre im Nenner (43) $P = o$.

47. Zus. Die Geschwindigkeit der Last verschwindet zweymahl, nachdem einer der beyden Factoren des Products $[(p - \Phi).a - qb].b$ verschwindet. Zwischen diesen beyden verschwindenden Werthen wird sie also einen größten haben.

48. Zus. Lägen B und A beyde auf einer Seite von O, wie in der 22. Fig. daß der Hebel von der zweyten Art wäre (Stat. 26.), so wäre b verneint, wenn aber alsdenn die bewegende Kraft q noch niederwärts ginge, so müßte die an

A, oder $p-\varphi$ aufwärts gehen, also verneint seyn; so wird $(p-\varphi).b$ ebenfalls bejaht, und der Ausdruck der Geschwindigkeit (43) läßt sich für diesen Hebel ungeändert brauchen. Wäre aber an eben diesem Hebel q aufwärts gerichtet, also verneint, so bliebe $p-\varphi$ niederwärts gerichtet und bejaht; In dem Zähler der Geschwindigkeit wäre also $(p-\varphi).b$ verneint, aber $-q.b^2$ bejaht. Ist also $(p-\varphi).ab-qb^2$ in 43. bejaht, so ist es hier, wenn die Buchstaben eben die Werthe behalten, verneint. Das Bejahte in 43. bedeutete, daß B in 21. F. steigt, und eben so bedeutet das Verneinte hier, daß B in 22. F. sinkt, dieses heißt aber eben, daß die Kraft überwiegend ist, wenn q so B aufwärts treiben wollte nachgibt, und B sinken läßt.

49. Aufg. In 43; B, die Stelle der Last, zu finden, wo sie am geschwindesten bewegt wird.

Aufl. Man sehe also b als veränderlich an, und setze das Differential der Geschwindigkeit $=o$ (An. Un. 155.) dazu braucht man nur den Zähler dieses mit dt dividirten Differentials oder $[(\frac{1}{3}V+P)a^2+Qb^2].(a.(p-\varphi)-2qb)-2Qb^2.(a.(p-\varphi)-bq)=o$ zu setzen. Dieses giebt $b^2=\frac{-2aq.(\frac{1}{3}V+P)}{(p-\varphi).Q}b+\frac{\frac{1}{3}V+P}{Q}a^2$ Daraus erhält man, R statt $\frac{1}{3}V+P$ gesetzt,

$$b=\frac{-aqR\pm ar(q^2R^2+(p-\varphi)^2.Q.R)}{Q.(p-\varphi)}$$

$$\text{Und } \frac{b}{a}=\frac{-qR}{Q.(p-\varphi)}\pm r\left(\frac{q^2R^2}{Q^2.(p-\varphi)^2}+\frac{R}{Q}\right)$$

Der

Der Irrationaltheil wird $\frac{qR}{Q\,(p-\varphi)}\,r\,(1+\frac{R}{Q}\cdot\frac{Q^2.(p-\varphi)^2}{q^2\,R^2})$ daher $\frac{b}{a}=\frac{+qR}{Q.(p-\varphi)}\cdot[-1\pm r\,(1+\frac{Q.(p-\varphi)^2}{q^2\,R})]$ oder $b:a=-1\pm r\,(1+\frac{Q.(p-\varphi)^2}{q^2\,R}):\frac{Q.(p-\varphi)}{qR}$. Es erhellt, daß man in den Umständen, unter welchen die Aufgabe ist betrachtet worden, den bejahten Werth von b nehmen muß. Der verneinte zeigte eine Stelle der Last im Arme OA an, und weil für selbige $\frac{b}{a}$ eine grössere verneinte Grösse als -2 wäre, so widerspräche er der Bedingung der Aufgabe, daß OA die halbe Länge des Hebels seyn soll.

50. Zus. Wenn $q=o$ (45) so ist $b=\pm a\,r\,\frac{R}{Q}$.

51. Zus. Wäre aber $Q=o$ unter solchen Umständen, wie 46 für $P=o$ angibt, so scheint der Werth von $\frac{b}{a}$ was Ungereimtes zu geben. Aber im ersten Ausdrucke von $\frac{b}{a}$ (49) ist der Irrationaltheil $=\frac{qR}{Q.(p-\varphi)}+\frac{p-\varphi}{2q}$... so daß die folgenden Glieder alle, steigende Potenzen von $\frac{Q}{R}$ enthalten,

halten, wie man aus dem binomischen Satze (An. Un. 46.) leicht herleitet. Folglich ist, das obere Zeichen gebraucht, $\frac{b}{a} = \frac{p - \varphi}{2q}$ ..... wo für $Q = o$ die folgenden Theile alle verschwinden, und dieses den völligen Werth von $\frac{b}{a}$ giebt. Eben das folgt auch, wenn Q in dem Zähler $= o$ im Anfange der Auflösung (49) verschwindet, denn da wird $Ra^2 . (a.(p - \varphi) - 2qb) = o$.

52. Anm. Diese Untersuchung gründet sich vornehmlich, wie die vom Mittelpuncte des Schwunges, auf die Momente der Trägheit (3), und wird also, nicht in Absicht auf die Analysis, sondern nur in der Rechnung schwerer, je weitläuftiger die Rechnungen für diese Momente werden. Deßwegen wird der Hebel hier für ein dünnes Prisma angenommen, eben wie die Pendelstange (33). Wollte man dieses nicht voraussetzen, so müßte die Summe der Momente der Trägheit für jede Figur des Hebels mühsamer gesucht werden. Eine der leichtesten Proben hievon wäre folgendes.

53. Aufg. Der Hebel sey ein rechtwinklichtes Parallepipedum; Sein Durchschnitt der Länge nach durch den Mittelpunct der Schwere sey ABCD 32. F., der Schwerpunct Z. Er liege in O. einer gegebenen Stelle der Linie CD, auf. Man verlangt sein Moment der Trägheit zu wissen.

Aufl. I. Durch einen willkührlichen Punct P der Linie CD, schneide man den Hebel mit einer Ebene, die auf AC senkrecht steht, und also seiner Grundfläche parallel liegt. Diese Ebene will ich einen

Quer-

Querschnitt nennen. Zwischen diesem Querschnitte und einem ihm unendlich nahen ist ein Element des Hebels enthalten. Weil aber dieses mit dem Hebel eine Grundfläche von beträchtlicher Grösse hat, so kann man es nicht mehr wie in 41. VIII. als einen Punct ansehen, der von O nur eine einzige Weite hätte, mit deren Quadrate er müsste multiplicirt werden, um das Moment der Trägheit für ihn zu finden. Man muß also dieses Element, in unzählich viel, in Vergleichung mit ihm unendlich kleine Theilchen zerlegen, deren jedes man für einen Punct annehmen kann, man muß eines solchen Theilchens Entfernung vom Puncte O unbestimmt ausdrucken, und derselben Quadrat mit dem Theilchen multipliciren, so hat man des Theilchens Moment der Trägheit. Daraus wird man durch wiederhohlte Integrationen das Moment der Trägheit, des Elements und des Hebels finden.

II. Der Querschnitt (I) sey HGFE 33. F. so daß sich HG in der Ebene befinde, die auf AC senkrecht steht, und die eine Seite des Hebels, wie HE die andere, also der BC 32. F. paralliel und gleich ist. Es seyn also seine drey Seiten AB = l, BC = HE = m, HG = n.

III. OP 32. und 33. Fig. sind einerley und = w. Auch sey ZQ auf den Querschnitt senkrecht, folglich PQ = $\frac{1}{2}$ m, so wird diese Linie PQ, gehörig verlängert, den Querschnitt halbiren, und sein Durchschnitt mit ABCD seyn. Man nehme PI = y, IS = z, Ii = dy, Sf = dz so ist TStf = dydz die

Grundfläche eines kleinen Prisma dydzdw das man ganz ansehen kann, als wäre es von O um die Weite OS entfernt, weil diese Weite für jeden andern Punct unendlich wenig von OS unterschieden ist. Aber $OS^2 = OP^2 + PS^2 = w^2 + y^2 + z^2$). Also ist dieses Prisma Moment der Trägheit $(w^2 + y^2 + z^2)$ dzdydw.

IIII. Man integrire dieses so daß nur z als veränderlich angesehen wird, so kömmt $[(w^2 + y^2).z + \frac{1}{3}z^3]$ dydw. Dieses verschwindet für $z = o$ und giebt also die Summe der Momente der Trägheit für alle solche Prismata, deren Grundflächen an der Linie IS von I nach S liegen, oder das Rechteck IT ausfüllen, also ist $z = m$ gesetzt $[(w^2 + y^2).m + \frac{1}{3}m^3]$ dy dw die Summe der Momente der Trägheit für alle Prismata deren Grundflächen das Rechteck Ik ausfüllen, oder das Moment der Trägheit eines Prisma, daß mdydw ist.

V. Diese Summe integrire man wieder so, daß man nur y veränderlich setzt. So kömmt $(w^2 my + \frac{1}{3}my^3 + \frac{1}{3}m^3y)$ dw, welches für $y = o$ verschwindet, und also die Summe der Momente der Trägheit für alle Prismata mdydw (IIII) giebt, deren Grundflächen Ik, an der Linie PI anliegen; Setzt man also $y = \frac{1}{2}n = PE$ so ist $\left(\frac{w^2 mn}{2} + \frac{mn^3}{24} + \frac{1m^3n}{6}\right)$ dw die Summe für alle solche Prismata, deren Grundflächen von P bis E gehen, d. i. das Moment der Trägheit für $\frac{1}{2}$n. mdw, das halbe Element des Hebels (l).

VI.

VI. Das Element des Hebels wird von ABCD wie HF von PQ in ähnliche Hälften getheilt, und O liegt dergestalt, daß wie auch S in der Hälfte PH liegt, allemahl ein Punct in der Hälfte PG eben die Lage gegen O hat. Daher gehören für das halbe Element des Hebels, das PG zur Grundfläche hat, eben die Momente der Trägheit, die für das gehören, das PH zur Grundfläche hat, und also ist beyder Summe, das Moment der Trägheit des ganzen Elements, doppelt so groß, als was in V. gefunden worden, nähmlich

$$mn.(w^2 + \tfrac{1}{24}n^2 + \tfrac{1}{3}m^2)\,dw.$$

VII. Dieß nun integrire man, daß w veränderlich ist, so kömmt $mn.\left(\frac{w^3}{3} + \frac{n^2 w}{24} + \frac{m^2 w}{3}\right)$ welches für $w = o$ verschwindet, also die Summe der Momente der Trägheit aller Elemente des Hebels giebt, die von O nach P liegen.

VIII. Wenn O vom Mittel N der Linie CD um die Weite $NO = e$ entfernt, also $OC = \frac{1}{2}l + e$; $OD = \frac{1}{2}l - e$ so gibt jenes statt w in VII. gesetzt, das Moment der Trägheit für das Stück des Hebels, das sich von O bis C erstreckt, und eben so dieses, für das Stück, das sich von O bis D erstreckt. Beyde zusammen also geben das Moment der Trägheit für den ganzen Hebel

$$= \frac{mn}{3}.\left(\frac{l^3}{4} + m^2 l + \frac{n^2 l}{4} + 3e^2 l\right)$$

VIII. Wenn $OZ = c$, so ist $e^2 = c^2 - NZ^2 = c^2 - \frac{1}{4}m^2$. Dieses in VIII. gesetzt, giebt das

Moment der Trägheit $\frac{mnl}{3} \cdot \left(\frac{l^2+m^2+n^2}{4} + 3c^2\right)$

$= \frac{V.(l^2+m^2+n^2)}{12} + V.c^2$ wenn des Hebels Masse oder $mnl = V$ ist.

X. Eine Linie von einer Ecke des Hebels in einer Grundfläche durch Z nach der entgegengesetzten Ecke der andern Grundfläche, eine Diagonale des Hebels hat zum Quadrate $m^2+n^2+l^2$. Man kann also das Moment der Trägheit (VIIII) durch diese Diagonale ausdrucken.

XI. Wenn man annimmt, der Hebel sey in seinem Schwerpuncte Z unterstützt, so findet man auf eine ähnliche Art sein Moment der Trägheit $\frac{V.(l^2+m^2+n^2)}{12}$. Man darf nähmlich nur eine Linie durch Q mit PI parallel bis an IK ziehen, und solche y nennen; Z aber kann nun das Stück von IK heissen, das von dem Orte, wo diese Parallele in IK einschneidet, bis an S geht, oder es ist nun $Z = IK - \frac{1}{2}m$. Ferner sey $ZQ = x$; so ist $ZS^2 = x^2+y^2+z^2$ welches mit dzdydw multiplicirt, und nach voriger Art integrirt, das jetzo gesuchte giebt. In dem Integrale, das man zuerst findet, setzt man $z = \frac{1}{2}n$, so hat man die Summe aller Momente der Trägheit, die dem dzdydx zugehören, deren Grundflächen an der einen Hälfte der Linie IK anliegen, und weil Z gegen beyde Hälften einerley Lage hat, so giebt dieses verdoppelt

diese

diese Summe für alle deren Grundflächen IK ausfüllen. Das übrige geht ferner wie vorhin.

XII. Das Moment VIIII. ist also = dem Momente XI. + V. c^2.

XIII. Man sieht leicht, wie für gegenwärtigen Fall die Frage (41) zu beantworten wäre. Statt des dortigen Moments der Trägheit (41; X.) müßte man nur das hiesige VIIII. setzen, und wofern die bewegenden Kräfte p, q, nach den Richtungen AD, BC, wirken, wäre OD = a; OC = b.

XIII. In der That verwandelt sich auch der hiesige Ausdruck VIIII. in den 41; XI. wenn m, n, verschwinden, oder der Hebel sehr dünn wird. In so fern ist also die gegenwärtige Untersuchung allgemeiner, als die (41). Gegentheils aber ist die (41) nicht auf ein Parallelepipedum eingeschränkt, wie die jetzige.

XV. Anm. Euler de machinar. vsu maxime lucroso Comm. Petrop. T. X. p. 67. hat 12 §. dieser Schrift das Resultat gegenwärtiger Untersuchung, wie in X; XII; ohne die Art, wie es gefunden wird, angegeben. Er redet zwar daselbst von einem prismatischen Hebel, und nennt dessen Diagonale AC 32. F. ist aber offenbar so, wie die Sachen hier erklärt worden, zu verstehen. Uebrigens ist aus diesem Aufsatze das bisherige von 38. an; auch bis 64. mit den Anwendungen und Zusätzen, die die Deutlichkeit und die Verbindung mit dem vorhergehenden erforderte, genommen.

54. Aufg. Das Moment der Trägheit eines senkrechten Cylinders (G. 53. S. 8. Z.) zu finden, der sich um seine Axe dreht.

Aufl. Des Cylinders Querschnitt sey 34. F. ein Kreis mit dem Halbmesser OB = b, seine Länge = l. Es sey OP = x, so hat der Kreis mit dem Halbmesser OP, den Innhalt $x^2\pi$ (G. 44. S. π ist das dortige P) also ist sein Differential, oder der Ring zwischen den Umkreisen, die OP und Op zu Halbmessern haben = $2\pi x dx$ und das ihm zugehörige Element des Cylinders = $2\pi l x dx$. Nun sind im Ringe alle Theile vom Mittelpuncte, und eben so im Elemente des Cylinders, alle Theile von der Axe um die Weite x entfernet, also ist jedes solchen Theiles Moment der Trägheit, seine Masse mit x^2 multiplicirt, daher das Moment der Trägheit des Elements des Cylinders = $2\pi l x^3 dx$ davon das Integral $\frac{\pi l x^4}{2}$ das Moment der Trägheit des Stücks vom Cylinder, das OP zum Halbmesser hat, und folglich des ganzen $\frac{\pi l a^4}{2} = B.\frac{a^2}{2}$ wenn des Cylinders Masse = B,

55. Zus. Man sehe nun OP als einen unveränderlichen Halbmesser eines Cylinders an, dessen Masse = P ist, so ist desselben Moment der Trägheit = $P.\frac{OP^2}{2}$ und also beyder Unterschied, oder das Moment der Trägheit des cylindrischen Ringes, der BP zur Breite hat = $\frac{\pi l}{2}.(OB^4 - OP^4) =$

$\frac{\pi l}{2}$

$\frac{\pi l}{2}.(OB^2-OP^2).(OB^2+OP^2)=\frac{B-P}{2}.(OB^2+OP^2)$.

56. Anm. Aus diesem Beyspiele wird man sehen, wie sich die Momente der Trägheit solcher Körper, die um Axen gedreht werden, finden lassen. Wenn man das Moment der ganzen Masse, die so gedreht wird, nicht auf einmahl finden kann, so muß man die einzelnen Theile suchen und zusammen setzen. So müßte man z. E. bey einem Mühlrade, die Momente der Wellen; der Arme, des Kranzes, der Schaufeln, kurz aller Theile des Rades zusammenrechnen, das Moment des ganzen Rades zu finden. Aus dieser Vorerinnerung wird man verstehen, warum in der Folge das Moment eines gewissen Ganzen mit einem Buchstaben angezeigt, und vorausgesetzt wird, man habe es gehörig gefunden. Wenn sich nähmlich ein solches Ganze auf verschiedene Arten zusammen setzen läßt (wie z. E. ein Mühlrad), so muß sein eigentliches Moment für jede Art der Zusammensetzung besonders gefunden werden, und man kann bey einer allgemeinen Betrachtung es auf keine andere Weise angeben, als daß es das Moment des Ganzen ist.

57. Aufg. An einer Welle 35. F. ist die Last Q und am Rade die Kraft P angebracht. Man sucht die beschleunigende Kraft, die den Punct A treibt.

Aufl. Es sey $AO=a$, $OB=b$; die Massen der Kraft und der Last P, Q, ihre bewegenden Kräfte p, q, der ganzen Maschine, nähmlich des Rades, der Welle, und alles was auser Kraft und Last muß bewegt werden, Moment der Trägheit in Absicht auf die Axe, um die sie sich drehen soll $=M$. Das Moment in der Bedeutung Stat. 38. ist $a.p=b.q$ wenn keine Friction da ist, oder $a.(p-\varphi)-bq$ wenn die

die Friction für sich allein, in A eine bewegende Kraft $= \Phi$ aufhalten könnte. Sind nun P und Q wie gewöhnlich dergestalt mit Rad und Welle verbunden, daß sich P so geschwind als der Punct A, Q so geschwind als der Punct B bewegen muß und sie nach Tangenten des Rades und der Welle wirken, so ist es bey der Bewegung eben so viel als wären P, Q, unmittelbar an den Puncten A, B, also ist an A der Masse Q eine Masse $\frac{Qb^2}{a^2}$, und der Masse der Maschine eine Masse $\frac{M}{a^2}$ gleichgültig; also ist die beschleunigende Kraft in A; mit welcher P niederwärts getrieben wird, nach eben dem Verfahren wie in (39) $\frac{a.(p-\Phi)-bq}{a\left(P+\frac{Qb^2+M}{a^2}\right)} =$

$$\frac{a.(p-\Phi)-bq}{M+Pa^2+Qb^2}.a.$$

58. Zus. Diese beschleunigende Kraft mit dt multiplicirt, giebt die Geschwindigkeit des Punctes A, und diese Geschwindigkeit mit $\frac{b}{a}$ multiplicirt, die Geschwindigkeit des Punctes B oder der Last (Stat. 80) die also $\frac{ab(p-\Phi)-b^2q}{M+Pa^2+Qb^2}$ dt wird.

59. Zus. Aus Ursachen, die leicht in die Augen fallen, ist hier alles wie in 43, nur daß statt des dortigen $\frac{1}{3}a^2V$ hier M, und also statt des dortigen

gen $\frac{1}{3}$ V hier $\frac{M}{a^2}$ zu schreiben sind. Man findet also auch den Halbmesser der Welle, an der die Last am schnellesten bewegt wird aus 49, nur die jetzt erwähnte Veränderung gemacht, daß also hier $R = \frac{M + Pa^2}{a^2}$ ist. Dieß giebt $b =$

$$\frac{-(M+Pa)q + r\sqrt{(q^2(M+Pa^2)^2 + Qa^2(p-\varphi)^2.(M+Pa^2))}}{Qa(p-\varphi)}$$

60. Zus. Man sieht leicht, daß sich mit der angezeigten Veränderung die Folgerungen aus 43. und 49. hier auch anbringen lassen.

61. Zus. Wenn man den Werth von b (59) in den Ausdruck der Geschwindigkeit (58) setzt, so findet man diese gröste Geschwindigkeit selbst. Das was in dt multiplicirt wird, ist

$$\frac{q}{2Q} \cdot \left[-1 + r\left(1 + \frac{Qa^2.(p-\varphi)^2}{(M+Pa^2)q^2}\right)\right].$$

62. Zus. Für $q = o$ (45) wäre (59) $b = r\frac{M+Pa}{Q}$. In (61) ziehe man die Wurzel so aus, daß 1 unter dem Wurzelzeichen, als der zweyte Theil angesehen wird, so ist sie $\frac{a.(p-\varphi)\,rQ}{q.r(M+Pa^2)}$ ..... also die gröste Geschwindigkeit überhaupt $\frac{-q}{2Q} + \frac{a.(p-\varphi)}{2r[(M+Pa^2).Q)}$ ..... wovon für $q = o$ nur

der

der zweyte Theil, als die hieher gehörige gröste Geschwindigkeit stehen bleibt.

63. Zus. Für $Q=o$ (46) b (49) zu finden, ziehe man in des Zählers Irrationaltheile die Wurzel wirklich aus, so wird der Zähler $\frac{Qa^2.(p-\varphi)^2}{2q}$ ..... und also $b=\frac{a.(p-\varphi)}{2q}$ ..... wo das hier gefundene, für $Q=o$ der völlige Werth ist. Eben so ziehe man in (61) die Wurzel wirklich aus, so daß 1 als der erste Theil der Grösse unter dem Wurzelzeichen angesehen wird, so kömmt die Geschwindigkeit $=\frac{a^2.(p-\varphi)^2}{4.q.(M+Pa^2)}$ ..... und das hier gefundene ist für $Q=o$ ihr völliger Werth.

64. Anm. Da die Geschwindigkeit der Last, nicht allein auf die Kraft p, sondern auch auf die Beschaffenheit der Maschine ankömmt, so erhellt, wie unrichtig ein gewöhnlicher Ausdruck der Schriftsteller von Maschinen ist, daß man allemahl an der Geschwindigkeit, mit welcher die Last bewegt wird, so viel verliere, so viel man durch Ersparung an der Kraft gewinne. Der Lehnsatz (Stat. 51) dient ein Merkmahl des Gleichgewichts anzugeben, aber man darf ihn nicht auf Maschinen in wirklicher Bewegung erstrecken, weil da ihre Trägheit mit in Betrachtung zu ziehen ist. Die Kürze verbietet mir aus der 53. XV. angeführten Schrift noch die dort befindlichen Untersuchungen über die stehende Welle (Stat. 71) und die Verbindung mehrerer Räder beyzubringen; es wird aber noch der Mühe werth seyn zu zeigen, wie man die wirklichen Bewegungen in 57. berechnen kann.

65. Aufg. Die Zeit t zu finden, in welcher P in 57. durch den Raum x sinkt.

Aufl. Wenn im I. Th. 80; f die hier 57. gefundene beschleunigende Kraft bedeutet, so ist vollkommen wie dorten $t = 2m\sqrt{\frac{x}{f}}$, wo $m = \frac{1}{250} = 0{,}004$.

66. Zus. Aus der gegebenen Zeit findet sich der Raum $x = \frac{ft^2}{4m^2}$.

67. Zus. Sollte ein gegebener Raum in einer gegebenen Zeit beschrieben werden, so fände sich $f = \frac{4m^2x}{t^2}$. Da also der Werth von f gegeben ist, so kann man in seinem Ausdrucke (57), von allen darinnen enthaltenen Grössen, eine finden, wenn die übrigen gegeben sind.

68. Zus. Der Raum der Last ist $y = \frac{bx}{a}$ (58) $= \frac{bft^2}{4am^2}$ (66).

69. Zus. Und $t = 2m\sqrt{\frac{ay}{bf}}$ (65).

70. Zus. Und $f = \frac{4m^2ay}{bt^2}$ (67).

71. Zus. Wenn Kraft und Last nur als Gewichte wirken, so ist (51) $p = P$; $q = Q$; und $f = \frac{a.(P-\varphi)-bQ}{M+Pa^2+Qb^2}.a.$

73. Zus. Eine Art, diese Untersuchungen mit Versuchen zu vergleichen, wäre folgende: Um die Rolle

Rolle D 6. F. gehe ein Faden, an dem die beyden Gewichte C und A hängen. Hier wird in 71. b = a = dem Halbmesser der Rolle seyn, und sich daraus f und das Uebrige berechnen lassen. Dürfte man die Masse der Rolle als sehr gering ansehen, so wäre

$M = o$ und $f = \frac{P - \varphi - Q}{P + Q}$ wo $P - \varphi$ und Q die

Gewichte C, A, bedeuteten. Dieß ist schon I Abschn. 50. §. gewiesen, nur daß man dorten die Ueberwucht bey A setzt. Wenn man aber wirklich so verführe, wie die 6. Fig. darstellt, so müßte auch das Gewicht des Fadens beyseit gesetzt werden, denn da das Stück des Fadens von der Rolle bis C, nebst dem Gewichte C niederwärts zieht, so wird das was niederwärts zieht, immer wachsen, je tiefer C sinkt, und je weiter D erhoben wird. Man würde also die Gewalt, die niederwärts treibt, oder was in I. Abschn. 51 die bewegende Kraft an A genannt wird, nicht für unveränderlich annehmen können, daher auch die beschleunigende Kraft sich beständig ändern würde. Der Faden muß aber die Gewichte zu halten stark, und damit sich die Zeit des Falles abmessen läßt, lang seyn; daher kann man ohne merklichen Fehler sein Gewicht nicht beyseite setzen. Diese Unbequemlichkeit zu vermeiden, befestige man gerade unter D eine andere Rolle von gleicher Grösse und führe den Faden wie ein Seil ohne Ende um beyde Rollen herum. Wenn man nun zwischen beyden Rollen, auf einer Seite C, auf der andern D, an den Faden befestigt, so bleibt immer auf

beyden

beyden Seiten der Rolle gleichviel vom Faden, weil sich soviel als auf einer Seite hinuntergeht, auf der andern um die unterste Rolle wieder hinaufzieht. Wenn man also den ganzen Faden wiegt, so kann man annehmen, die Hälfte seines Gewichts befinde sich allemahl auf jeder Seite der Rolle, und statt Q, das Gewicht $D+$ dem halben Gewichte des Fadens, eben so statt $P-\varphi$, das Gewicht $C+$ dem halben Gewichte des Fadens brauchen.

74. **Exempel.** Nach der beschriebenen Vorrichtung hat man an eine Schnur ohne Ende, die 8 Loth wog, auf einer Seite 66 Loth auf der andern 64 befestiget. Man nimmt an das Reiben habe 1 Loth betragen. Die Frage ist, wieviel Zeit die 66 Loth gebraucht haben 55,890 rheinländische Fuß zu sinken.

Hier ist $P=66+4$, $\varphi=1$, $Q=64+4$, also (73) $f=\frac{1}{138}$, $y=55890$, also in (69) $t=0,008.\sqrt{(55890.138)}$. Die Zahl unter dem Wurzelzeichen ist 7712820, deren Wurzel $=2777,1$ daher $t=22,2168$ Secunden.

Das Exempel steht in C. G. Schobers Versuch einer Theorie der Ueberwucht, gegen zuverlässige Experimente gehalten (Leipz. 1751) 32. §. Dieses kleine Werk enthält mehr neues und brauchbares, als viel andere tiefsinnige Abhandlungen. Das theoretische davon ist im vorhergehenden mit enthalten, die Versuche aber, dergleichen meines Wissens sonst niemand angestellt, gehören dem Herrn Bergrath Borlach und dem Verfasser zu; Auf bey-

der Einsichten und Geschicklichkeit in der Mechanik, hat Deutschland und besonders Sachsen Ursache stolz zu seyn. Drey Versuche für das hier berechnete Exempel gaben 23; 22; 22; Secunden. Der Fall ist dorten 54 pariser Fuß, die ich mit 1,035 multiplicirt habe, um sie auf rheinländische zu bringen (Geom. 32. S. 2. Anm.). Erinnerungen von dem vortheilhaftesten Gebrauche der Maschinen kann man daselbst 36. §. nachlesen.

75. Zus. Die Friction bestimmt man insgemein so, daß man die Maschine ins Gleichgewicht bringt, und auf einer Seite nach und nach soviel zulegt bis eine Bewegung erfolgt. So erhält man aber nur die Gränzen, zwischen welche die Friction fällt. Denn wenn z. E. in einer Wage auf jeder Seite 10 Pf. lägen, und ein Zusatz von $\frac{1}{2}$ Quentchen auf der einen Seite noch keinen Ausschlag gäbe, aber $\frac{3}{4}$ Q. einen Ausschlag verursachten, so würde man schliessen, daß die Friction mehr als $\frac{1}{2}$ aber noch nicht $\frac{3}{4}$ Qu. betrüge. Und so könnte man wohl diese Gränzen enger zusammen bringen, allemahl aber wäre das was wirklich einen Ausschlag, eine Bewegung, verursacht, etwas mehr als die Friction. Hier aber läßt sich φ völlig genau bestimmen, wenn alles Uebrige im Versuche genau gegeben ist. Auch diese Erinnerung macht Schober 34. 35. §.

76. Exempel. Wenn alle gegebene Grössen wie in 74. bleiben, nur φ unbekannt, und durch den Versuch $t = 22$ Sec. ist, die Friction φ zu finden.

Es ist also $f = \frac{70 - \varphi - 68}{138} = \frac{2 - \varphi}{138}$; aber auch

$(70)\ f = \frac{4.\ 0{,}000016.\ 55890}{22.\ 22}$. Weil $22 = 2.11$ so ist der Divisor $= 11.\ 11.\ 4$. Daraus findet sich $f = 0{,}00739$. Folglich $2 - \varphi = 0{,}00739.138$ welches $\varphi = 0{,}98018$ giebt, vorhin war $\varphi = 1$ Loth angenommen.

77. Zus. Der Punct A wird nach der Seite wo P liegt zu bewegt, oder P geht nieder, und die Last Q steigt, wenn f bejaht, das ist, wenn der Zähler dieses Werthes in 57. bejaht ist. Würde aber dieser Zähler oder $a.(p - \varphi) - bq$ verneint, so zeigte dieß an, daß A nach der entgegengesetzten Seite getrieben würde, also P steigen, und die Last sinken müßte, diese nähmlich hätte alsdenn die Uebermucht. In diesem Falle scheint es, als dürfte man nur den Zähler des Werthes von f verneint setzen, oder als würde er $-(a(p - \varphi) - bq).a$, dazu denn eben der vorige Nenner, auch den vorigen Werth von f, nur verneint gäbe, und das wäre also die beschleunigende Kraft, mit welcher A nach der entgegengesetzten Seite, oder P aufwärts getrieben würde. Daraus würde man für den Raum, um welchen die Last sänke, in 68. völlig eben den Werth finden, nur verneint, weil sich das vorige Steigen in Sinken verwandelt. Die Zeit fände sich völlig wie in 69, und die Grösse unter dem Wurzelzeichen wäre bejaht, weil beyde y, und f, verneint sind. Indessen zeigt eine kleine Ueberlegung, daß der Werth

von f eine geringe Aenderung leiden, sonst alles nur jetzt gesagte bleiben wird. Man fand nähmlich f aus der bewegenden Kraft, die $p - \Phi - \frac{bq}{a}$ genommen wurde, und niederwärts gerichtet war. Ist sie verneint, und also aufwärts gerichtet, so ist klar, daß der Theil dieser aufwärts gerichteten Kraft, der blos auf p und q ankömmt, nun $\frac{bq}{a} - p$ seyn wird; da aber die Friction, die aufwärts und die niederwärts gehende Bewegung, eine so stark als die andere hindert, so ist klar, daß mit ihr die bewegende Kraft aufwärts $\frac{bq}{a} - p - \varphi$ seyn wird, und dieß ist der Zähler des Werthes f, für die entgegengesetzt gerichtete beschleunigende Kraft $(bq - ap - a\varphi).a$ der also nicht völlig dem Zähler des Werthes des vorigen f entgegengesetzt ist, weil sich in beyden $-a\varphi$ befindet. Mit dieser Veränderung des Zählers bleibt übrigens alles, wie jetzt ist gewiesen worden.

78. Zus. Ein Fall hievon wäre, wenn man ein Gewicht Q an eine Welle henkte, das Rad aber ledig liesse, da wäre (71) $P = o$ und der Werth der Kraft, welche A jetzo beschleuniget, bekäme aus (77) zum Zähler $(bQ - a\varphi).a$ Hier aber wird es natürlicher seyn, die Friction so zu bestimmen, daß sie ψ an B erhalten kann, also $b\psi = a\varphi$ ist; folglich wird hier $f = \frac{(Q - \psi).ab}{M + Qb^2}$.

79. Exempel.

79. **Exempel.** Es sey statt des Rades eine cylindrische Scheibe, wo $a = 0,44$ des pariser Fusses, $b = 0,045$; der Scheibe, dem ihre Masse proportionirt ist, 106 Loth $Q = 9$ Loth $\psi = 1,75$ Loth. Man fragt, wie viel Zeit Q braucht, durch 40 pariser Fuß zu sinken.

In diesem Exempel beym Schober 42. §. ist die Masse der Welle nicht angegeben. Weil man aber die Welle für einen Cylinder von gleicher Länge mit der Scheibe annehmen darf, wo die Zapfen, auf denen sie ruht, beyseite gesetzt werden, so ist ihre Masse $= \frac{b^2}{a^2} . 106$ und aus 54. das Moment der Trägheit der Scheibe $= \frac{106}{2} . 0,44^2 = 53 . 0,44^2$ und der

$$\text{Welle} = \frac{0,045^2}{0,44^2} . \frac{106}{2} . 0,045^2 = \frac{53 . 0,045^4}{0,44^2},$$

also $M = 53 . (0,44^2 + \frac{0,045^4}{0,44^2})$. Dieses zu finden, lassen sich die Logarithmen mit Vortheile gebrauchen. In dem letzten Factor nähmlich ist des letzten Theils Logarithme $= 4 . (\log 45 - 3) - 2 . (\log 44 - 2) = 4 \log 45 - 12 - 2 \log 44 - 8$. Dieses gibt den Logarithmen $-4,6740554$; dazu 9 addirt, gibt den Logarithmen dieses Bruchs in 1 000 000 000 Theilchen (Arithm. V. C. 33.). Er gehört zu 21181 und giebt also diesen Theil

$$0,000021181$$

$$\text{aber } 0,44^2 = \underline{0,1936}$$

$$0,193621181$$

welches mit 53 multiplicirt, M = 10, 261912593 gibt. Ich habe nur gewiesen, wie man M völlig genau berechnen sollte, man sieht leicht, daß solche Schärfe nicht nöthig ist.

Nun ist $Qb^2 = 0,002025.9$ daher der Nenner $M + Qb^2 = 10,235137$ dafür ich 10, 235 annehmen will. Im Zähler ist $Q - \psi = 7,25$ und $ab = 0,0198$ also der Zähler 0, 14355 dessen Logarithme ist $-5 + \log 14355$ und des Nenners seiner $-3 + \log 10235$, daraus findet sich $\log f = 5 + 3,1469153$ also $f = 0,01403$. Nun ist die Frage vermöge 69; t aus y zu finden. Es muß aber y in Tausendtheilchen des rheinländischen Fusses ausgedruckt werden. Es ist aber der Logarithme der Menge rheinländischer Fusse die 40 pariser gleichen aus Geom. 32. S. 2. Anm. $\log 40 + \log \frac{p}{r}$; und dazu 3 addirt, weil man hier Tausendtheilchen verlangt, giebt $\log y = 4,6170418$. Weil nun $\log a = -2 + \log 44$ und $\log b = -3 + \log 45$ so ist $\log \frac{a}{b} = -0,0097598 + 1$ also $\log \frac{ay}{b} = +5,5072820$ davon $\log f$ abgezogen, giebt $\log \frac{ay}{bf} = 7,3503667$ solches halbirt und dazu $\log 2m = -3 + \log 8$ addirt, gibt $\log t = 1,5782733$ also $t = 37,87$ Secunden. Schobers Versuch gab 39 S. Der Unterschied ist bey der Schwürigkeit, Zeit und andere Grössen aufs

schärfste

schärfste abzumessen, und dem Wiederstande der Luft, welcher die Zeit des Falles verlängert, nicht beträchtlich.

80. Erkl. Der Mittelpunct des Stosses (centrum percussionis) eines Körpers heißt die Stelle, wo man sich seinen völligen Stoß vereinigt vorstellt, wie sein Gewicht im Schwerpuncte. Dasjenige also, worauf diese Stelle anstößt, empfindet den völligen Stoß des Körpers, und hält seine fernere Bewegung auf, wenn es nicht ausweichet, eben wie das, was den Schwerpunct eines Körpers hält, seine völlige Last trägt, oder von solcher niederwärs getrieben wird. Es erhellet auch, daß bey einem Körper, dessen Puncte sich alle nach parallelen Linien mit gleichen Geschwindigkeiten bewegen, die Mittelpuncte des Stosses und der Schwere einerley sind.

Die Theorie dieses Punctes wird mir für meine Absichten zu weitläuftig. Wallis hat ihn meines Wissens zuerst betrachtet, und gefunden, daß er in manchen Fällen mit dem Mittelpuncte des Schunges einerley ist, daher Stone (analyse des inf. pet. compren. le calcul. integral, Sect. 7.) beyde Puncte für einerley angenommen. Joh. Bernoulli aber in s. Anm. über dieses Buch (Op. Io. Bern. T. IIII. n. 170; 181. S.) hat erinnert, unter welchen Umständen beyde einerley oder unterschieden sind, und in welchen Fällen also Stone die Wahrheit, obgleich nur von ohngefähr, getroffen hat oder nicht. Daß, auf eben die Art, in Carres Methode pour la mesure des surfaces, das

unrichtig ist, was nach den ersten vier Aufgaben des 4. Abschnittes folgt, hat ebenfalls Desaguliers erinnert, Course of Exp. philos. App. to Vol. II. p. 549. (Lond. 1745; 4°).

Von der Friction.

81. Aufg. Auf der wagrechten Ebene AB (36. F.) liege ein Körper, dessen Gewicht = Q. Nach einer horizontalen Richtung GH, die durch seinen Schwerpunct gehet, ziehe ihn ein Gewicht P, das an diesem um eine Rolle gelegten Faden, herabhängen kann. Man sucht wie dieses Gewicht sinken wird.

Auflö. Weil des Körpers Last von der Ebene getragen wird, so kömmt hier blos seine Masse in Betrachtung, das Gewicht, in dem es sinkt, muß solche mit sich ziehen. Es ist also soviel als ob die bewegende Kraft des Gewichts P; in die Masse P + Q ausgebreitet wäre; daß daher die beschleunigende Kraft in dieser Masse $\frac{P}{P+Q}$ ist; oder das Gewicht wird auf eben die Art fallen, als wenn es von einer Kraft der Schwere getrieben würde, die $\frac{P}{P+Q}$ der bey uns natürlichen Schwere wäre (wie in I. Abschn. 51.).

82. Zus. So wird das geringste Gewicht, die größte Masse fortziehen, nur etwa sehr langsam. Wäre z. E. Q = 99, P = 1 so würde P so sinken,

als

als wenn es von $\frac{1}{100}$ unserer Schwere getrieben würde, also in einer Secunde durch 0,15625 des rheinl. Fusses (I. Abschn. 37. und 58).

83. Zus. Wenn also jede Masse Q, nicht von jedem Gewichte P fortgezogen wird, so muß eine Hinderniß da seyn, und man sieht leicht, daß solche nur im Reiben (Stat. 150.) bestehen kann. Die Grösse dieses Reibens in einem besondern Falle zu finden, hat man P so lange vermehrt, bis Q davon ist fortgezogen worden. Wenn man z. E. fand, daß bey $P = \frac{1}{3}Q$, noch keine Bewegung erfolgte, aber solches geschah, wenn P ein wenig grösser war, so hat man gesetzt, das Reiben betrage $\frac{1}{3}$ des Drucks, den die Last Q auf die Ebene ausübt, die sie trägt. Es ist offenbahr, daß man so nicht die eigentliche Grösse des Reibens, sondern Gränzen, zwischen die sie fällt, findet; so würde $\frac{1}{3}Q$ kleiner, und $\frac{1}{3}Q+e$ grösser als die Friction seyn, wenn das letztere eine Bewegung hervorbringt. Diese Gränzen sind desto näher beysammen, je kleiner e ist, aber die eigentliche Friction wird dadurch doch nicht bekannt. Dergleichen Erinnerung ist schon (75) gemacht worden.

84. Zus. Die eigentliche Friction sey $= \Phi$, so ist in (81) die beschleunigende Kraft $\frac{P-\Phi}{P+Q}$. Wenn diese das f im I. Abschn. 80. bedeutet, und das Gewicht P in t Secunden durch m Tausendtheilchen des rheinländischen Fusses gesunken ist, so ist dieses

$f = \frac{x}{(125.t)^2}$ und $\varphi = P - f.(P+Q)$. Wenn man also die Zeit genau wüßte, in der P durch eine gegebene Höhe sänke, so liesse sich daraus die Friction völlig genau berechnen, und dieß wäre der einzige Weg dazu. Wegen der Schwürigkeit diese Zeit und Höhe genau anzugeben, die ich auch schon (79) bemerkt habe, dürfte wohl in der wirklichen Ausübung das vorhergehende Verfahren, welches nur ziemlich enge Gränzen angiebt, eben so viel Richtigkeit versprechen.

85. Auf diese Art die Grösse des Reibens zu bestimmen (83) ist Amontons zuerst gefallen, und hat aus seinen Erfahrungen geschlossen, das Reiben betrage ohngefähr $\frac{1}{3}$ des Drucks, und ändere sich nicht, wenn sich dieser nicht ändert, obgleich die Flächen, die sich an einander reiben, grösser oder kleiner werden. Mem. de l'Ac. des Sc. 1699. p. 120; 206; Parent hat diese Untersuchungen wiederhohlt, und setzt es $\frac{7}{20}$ des Drucks. Mem. 1720.

86. Erkl. Eine schiefe Fläche wie AC 6. F.* lasse sich nach Gefallen erhöhen oder senken, wie wenn in C ein Gewinde wäre, um das sie sich drehen liesse, daß man den Winkel ACB nach Gefallen vergrössern oder vermindern könnte, wobey BC stets horizontal bleibt. Auf ihr liege eine Last wie P; deren Gewicht man a nenne. Wegen der Friction, wird diese Last nicht gleich bey jeder geringen Neigung der Fläche herabgehen, sondern nur erst, wenn der Winkel ACB eine gewisse Grösse erlangt

langt hat. Der größte Winkel ACB, unter dem die Last noch liegen bleibt, so daß sie herabgeht, wenn man ihn nur ein wenig vergrössert, heißt der Ruhewinkel (angulus quietis).

87. Aufg. Wenn der Ruhewinkel $= \delta$ durch die Erfahrung ist gefunden worden, die Grösse der Friction zu bestimmen.

Aufl. Die Last wird an die schiefe Ebene senkrecht mit der Gewalt a. col δ angedrückt (Stat. 98) und die Gewalt, welche sie längst der Ebene hinab treiben will, ist a. sin δ (Eben das.). Diese Gewalt ist genau der Friction gleich, durch welche sie aufgehalten wird. Also ist die Friction, welche diese Last auf der schiefen Fläche hat, $=$ a. sin δ.

88. Man heisse diese Friction f; und Φ die Friction, welche eben die Last auf einer wagrechten Ebene hätte (84). Beyder Verschiedenheit kann nur darauf ankommen, daß die Last auf eine wagrechte Ebene anders, als auf die schiefe angedruckt wird (ich setze nähmlich übrigens, daß beyde Ebenen einerley Beschaffenheit in Absicht auf ihre Rauhigkeit u. d. g. haben). Da nähmlich $f =$ a. sin δ von einem Drucke a. col δ und Φ von einem Drucke der völligen Last $=$ a herrührt, so ist $f : \Phi =$ a. col δ : a

und statt f seinen Werth gesetzt $\Phi = \frac{\text{a. sin } \delta}{\text{col } \delta} =$ a. tang δ.

Man begreift, daß dieses Verfahren, wie das vorige, nur Gränzen giebt.

89. Wenn

89. Wenn $\phi = n$ so ist $n = \text{tang}\,\delta$. Man findet also den Winkel der Ruhe, wenn n gegeben ist, oder n wenn der Winkel der Ruhe gegeben ist. Weil hier der Sinus totus $= 1$, so muß man den Logarithmen der Tangente in den Tafeln zu finden, 10 als den Logarithmen des Halbmessers der Tafeln addiren, oder es ist $10 + \log n = \log \text{tab tang}\,\delta$. So findet man für $n = \frac{1}{3}$ wie Amontons angiebt, log tab tang $\delta = 10 - 1\,3 = 9{,}5\,2\,2\,8\,7\,8\,8$ also $\delta = 18^\circ\ 26'$.

90. Wenn man aus dem Ruhewinkel, n findet, so müßte man eigentlich $\log n = \overline{\log \text{tab tang}\,\delta - 10}$ setzen. Dieß aber würde einen verneinten Logarithmen geben, weil $n < 1$. Man setze also $\phi = \frac{ma}{10000}$ ob gleich die Versuche wenigmahl eine solche Schärfe zuverlässig geben werden, so muß man 4 zum vorigen Logarithmen addiren, oder es ist $\log m = \log \text{tab tang}\,\delta - 6$.

Bilfinger Comm. Petrop. T. II. p. 403. seq. hat das Reiben auf diese Art untersucht, und den Ruhewinkel allemahl zwischen 12 und 15 Gr. gefunden. Nimmt man ihn 13 Gr. 30 M. an, so wird nach der nur gegebenen Regel $\log m = 3{,}38\,0\,3\,5\,3\,7$ welches $m = 2400$ giebt; oder es wäre $\phi = 0{,}24.a$, die Friction ohngefähr $\frac{1}{4}$ des Drucks.

Aus dem Ruhewinkel die Friction zu berechnen, würden in der Formel $n = \text{tang}\,\delta$ die Tangenten selbst, auf dem Halbmesser 1 angebracht, noch bequemer gebraucht werden. So fände man hier gleich tang δ oder $n = 0{,}2400788$.

91. Wenn

91. Wenn nun ACB = α etwas grösser als der Ruhewinkel ist, so geht die Last längst der Fläche hinunter, als wenn sie nach dieser Richtung von einer Schwere getrieben würde, die ohne Friction sich zur natürlichen Schwere wie $\sin\alpha : 1$ verhielte (Stat. 98). Die Friction der Last a auf dieser Fläche, wird sich vermuthlich nach ihrem Drucke = a. $\cos\alpha$ richten, und man nimmt also an, daß sie ein gewisses Stück dieses Druckes seyn, und sich also durch μ. a. $\cos\alpha$ ausdrücken lasse. Betrüge z. E. die Friction $\frac{1}{3}$ des Druckes, so wäre $\mu = \frac{1}{3}$. Dieß wäre die ganze Friction einer gegebenen Last; bey der Friction, so etwas wie im I. Abschn. 49; die bewegende Kraft, das was dorten die beschleunigende Kraft war, wäre hier μ. $\cos\alpha$. Wenn nähmlich die ganze Friction sich allemahl zum Drucke verhält, wie $\mu : 1$, so wird sich diese beschleunigende, oder hier, eigentlicher zu reden, hindernde Kraft der Friction, die man sich in jedem Elemente der Masse vorstellen muß, zur natürlichen Schwere verhalten wie μ. $\cos\alpha : 1$.

Die Kraft also, welche jede Masse wirklich längst der gegebenen Fläche hinunter beschleunigt, ist $\sin\alpha - \mu$. $\cos\alpha$. Daher durchläuft der Körper auf der schiefen Fläche, einen Raum = m Tausendtheilchen des rheinländischen Fusses in $\frac{m}{\sin\alpha - \mu.\cos\alpha}$ Secunden (I. Abschn. 80). Wenn diese Menge Secunden = n gesetzt wird, so ist klar, daß sich μ berechnen liesse, wenn α, n, m, durch

eine

eine Erfahrung gegeben wären. Weil nähmlich 125. 125 = 15625 so ist $15625.n^2.\sin\alpha - 15625.n^2\mu.\cos\alpha = m$ und $\mu = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{m}{15625.n^2.\cos\alpha} = \tang\alpha - \frac{m.\sec\alpha}{15625.n^2}$.

Dieses Mittel schlägt Herr Euler vor die Friction zu bestimmen, sur le frottement; Mem. de l'Ac. de Prusse 1748; p. 130. Ich habe dabey eben die Erinnerung wie (84), wozu hier noch die Schwürigkeit den Winkel genau zu messen kömmt, wenn man dorten die ähnliche Schwürigkeit, die Lagen der Ebene und des Zuges der Kraft P genau wagrecht zu erhalten, nicht rechnen will. Herr Euler erinnert selbst a. a. O. 132. S. daß die Zeit, welche ein Körper braucht, auf einer schiefen Fläche 15,625 rheinl. Fuß herabzugehen, nie grösser als 3 Sec. seyn kann. Und da sich mit einer so langen Ebene schwerlich Versuche würden anstellen lassen, so begreift man, daß eine sehr genaue Abmessung kleinerer Zeittheile als Secunden bey diesem Versuche nöthig wäre. Daß übrigens die Friction eigentlich aus der Bewegung muß berechnet werden, hat auch Schober erinnert (75).

92. Aufg. Ein Rad dessen Halbmesser CA ist (37. Fig.) liege mit seinem Zapfen LBM in der Lager, so daß der Zapfen auf B ruht, sein Halbmesser ist BC; was von der Stelle B des Lagers getragen wird, heisse P; es wird die Hälfte des Gewichts seyn, das Rad, Welle, und die etwa an der Welle hängende

Last,

Last, haben, die Friction verhalte sich zum Drucke $= \mu : 1$, und sey also $= \mu : P$. Man sucht, wie groß eine Kraft in A nach der wagrechten Linie AP seyn muß, die mit der Friction in B im Gleichgewichte ist, so daß die Friction überwunden wird, wenn man die Kraft ein wenig vermehrt.

Aufl. Wenn diese Kraft F heißt, so kann man die Friction als eine ihr entgegengesetzte Kraft in B ansehen, und beyder Momente sind gleich; also

$$F.CA = \mu.P.CB \text{ und } F = \mu.P.\frac{CB}{CA}.$$

93. Zus. F ist desto kleiner, je kleiner der Halbmesser des Zapfens in Vergleichung mit dem Halbmesser des Rades ist. Dieses zeigt, in was für Absicht man die Zapfen dünn macht, wenn sich die Friction gleich nur nach dem Drucke richtet, und also $= \mu P$ bleibt, der Zapfen mag dünn oder dick seyn. Das Moment dieser Friction nähmlich ist an einem dünnen Zapfen geringer, und es wird daher, sie zu überwinden, weniger Gewalt am Rade erfodert, als wenn bey eben dem Rade, der Zapfen dicker wäre.

94. Zus. Eine solche Kraft nach AP aber ändert selbst die Friction, denn wenn der Druck P nach der Lothlinie CB geht, und diese horizontale Kraft dazu kömmt, so entsteht aus beyden eine mittlere Kraft, nach deren Richtung das Lager in einer Stelle, die von B nach E zu liegt, gedruckt wird. Dieses veranlaßt neue Untersuchungen, die Hr. Euler sur la diminution de la resistance du frottement

Mem.

Mem. de l'Ac. de Pr. 1748. p. 133. weiter getrieben hat.

95. Mich hier in diese Untersuchungen weiter einzulassen, schreckt mich nicht sowohl ihre Weitläuftigkeit, als die Ungewißheit der Gründe, die man hier voraussetzen muß, ab. Wenn man von der Friction was allgemeines lehren will, so muß man annehmen, sie richte sich blos nach dem Drucke, ohne daß man auf die Grösse der Flächen, die sich an einander reiben, sehen dürfe. Amontons, welcher diesen Satz zuerst gelehrt, gesteht selbst, daß er unerwartet sey. Sturm Misc. Berolinens. 1710; Class. Math. art. 29. hat gegründete Erinnerungen dagegen gemacht, auch Leibniz eben das. art. 30. gewiesen, daß man bey der Friction verschiedene Arten der Bewegung unterscheiden müsse. Gegentheils hat Camus, traité des forces mouvantes L. I. ch. 4. sect. 4. diesen Satz durch Schlüsse und Erfahrungen darzuthun gesucht, aber Musschenbrök, Phys. T. I. c. 9. durch Versuche, die zwar nur im kleinen, aber mit allem möglichen Fleisse gemacht worden, zu finden geglaubt, daß das Reiben sich nicht wie der Druck verhält, daß es sich, bey unverändertem Drucke, ändert, wenn sich die reibende Oberfläche ändert, daß es bey einerley Materien nicht immer einerley bleibt, daß es in andrer Verhältniß wächst, als die Geschwindigkeit. Die, welche annehmen, das Reiben verhalte sich wie der Druck, stimmen doch in der Verhältniß, die es selbst zum Drucke haben soll, nicht überein (85; 90;). Und die wahre Grösse des Reibens aus der Bewegung, aus der

sie

sie sich allein finden läßt, zu bestimmen, erfodert Versuche, bey denen man der Gefahr zu irren sehr ausgesetzt ist (84; 91;). So viel Schwürigkeiten gehoben zu sehen, wird man wohl hier nicht erwarten, also wird man zufrieden seyn, daß man sie aus gegenwärtiger kurzen Abhandlung kennen lernt. Wie das Reiben unter der Voraussetzung, daß es dem Drucke gemäß ist, bey verschiedenen Maschinen berechnet wird, kann man schon aus den angeführten Schriften sehen, denen man noch Belidors Architect. Hydraul. l. B. 2. Cap. imgleichen Herrn Jens Krafts Foreläsninger over Statik ꝛc. (den II. Band seiner zu Soroe 1764. herausgek. Foreläsninger over Mekaniken) in der fünften Vorlesung, beyfügen kann. Im Dictionaire Encyclopedique findet sich auch der Artikel Friction vom Hrn. d'Alembert sehr umständlich ausgeführt.

Die Gesetze des Stosses (Leges motus; s. conflictus corporum). und damit verwandte Untersuchungen.

96. Erkl. Ein Körper, der seine Bewegung nicht fortsetzen kann, ohne einen andern vor sich aus der Stelle, wo er selbst hin will, zu treiben, stößt denselben; und zwar gerade (directe), wenn die Linie, nach der sich sein Schwerpunct bewegt, auch durch des andern Körpers Schwerpunct geht, und auf die Ebene, in der beyde einander berühren, senkrecht steht; sonst schief (oblique).

97. Wenn man auch gleich hier auf die Schwere der Körper nicht acht giebt, so betrachtet man doch

den Schwerpunct als die Stelle im Körper, deren Zurückhaltung den Körper dergestalt aufhalten, und die völlige Gewalt, die er weiter fortzugehen anwendet, hemmen kann, wie die Unterstützung des Schwerpunctes in der Statik, des ganzen Körpers Last, zu sinken, verhindert. Eben so heißt man von zween Körpern den gemeinschaftlichen Schwerpunct, auch hier, die Stelle wo der Schwerpunct wirklich ist, wenn sie beyde schwer und an einem Hebel angebracht sind. Man bedient sich dieses Nahmens auch hier, wenn man die Massen nur als träg oder auch unter andern Umständen betrachtet, da sich ihre bewegende Kräfte nicht wie ihre Massen verhalten. Der Nahme: Mittelpunct der Massen ist zu dieser Absicht von Daniel Bernoulli Traité du flux. & reflux. ch. 1. vorgeschlagen worden. Man könnte auch, wenn ein neuer Nahme nöthig wäre, mit Sam. König, Mittelpunct der Trägheit sagen. S. dessen Abhandlung de centro inertiae; Act. Erud. Lipf. Ian. 1738; p. 35.

98. Um diese Untersuchung nicht gleich anfangs durch die Mannichfaltigkeit der Gestalt der Körper, der Austheilung der Masse in ihnen, (da etwa ein Körper aus Materien von verschiedener Art, aus Zinn und Bley, eins an einer Stelle, das andere an der andern bestehen könnte) u. s. w. zu verwickelt zu machen, stelle ich mir Körper vor, die durchaus einerley Materie enthalten, und eine solche Gestalt haben, wo sich der Schwerpunct leicht angeben läßt, z. E. Würfel, Kugeln, u. d. g.

99. Ich

99. Ich betrachte ferner die Bewegungen der unterschiedenen Theile eines Körpers, in so fern sie alle in parallelen Linien mit einerley Geschwindigkeit geschieht, so daß jede Stelle des Körpers sich so geschwind als der Schwerpunct, und nach einer Richtung bewegt, die dieser Richtung parallel ist, wie wenn man einem Würfel auf einem glatten Tische einen Stoß gäbe, der durch des Würfels Schwerpunct, mit dem Tische parallel ginge. So kann man also den ganzen Körper, als einen bewegten Punct betrachten, und seine Geschwindigkeit, ist die Geschwindigkeit seines Schwerpunctes. Wenn sich eine Kugel während ihres Fortlaufens wälzet, so wird jeder Punct von ihr nach seiner Entfernung von der Axe, um welche sie sich wälzt, eine andere Geschwindigkeit haben, mit der er sich um diese Axe bewegt, diese unterschiedenen Geschwindigkeiten also, kann ich bey dem Stosse einer Kugel, die sich wälzt, nicht in Betrachtung ziehen, ich stelle mir ihn nur so vor, wie er erfolgen würde, wenn die Kugel, ohne zu wälzen, anstiesse.

100. **Erkl.** Ein Körper heißt **hart**, wenn er durch den Druck oder Stoß seine Gestalt, die Lage seiner Theile gegen einander nicht ändern läßt; **weich**, wenn er dieses gestattet, und die Theile alsdenn in der Lage gegen einander bleiben, in welche sie durch die äuserliche Gewalt sind gebracht worden; **elastisch** (federhart), wenn sich die Lage der Theile und die Gestalt ändern lassen, aber nachgehends

gehends beydes sich wieder so herstellt, wie es vor dem Stosse gewesen ist.

101. Grundſ. Wenn eine gegebene Masse mehr Geschwindigkeit bekömmt, als sie bisher hatte, so wird man sagen, sie bekomme in eben der Verhältniß mehr Bewegung. Bey zwo gleichen Massen, verhalten sich also die Grössen ihrer Bewegungen wie die Geschwindigkeiten.

102. Grundſ. Wenn zwo Massen, z. E. eine einfache und eine doppelte, sich mit gleichen Geschwindigkeiten bewegen, so sind in der doppelten noch einmahl so viel Theile, als in der einfachen, und jeder solcher Theil hat eben so viel Bewegung, als der gleiche Theil der einfachen, folglich ist in der doppelten Masse noch einmahl soviel Bewegung als in der einfachen: Also verhalten sich, bey gleichen Geschwindigkeiten die Grössen der Bewegungen wie die Massen.

103. Aufg. Die Massen M, m, haben die Geschwindigkeiten C, c, man sucht die Grössen ihrer Bewegungen mit einander zu vergleichen.

Aufl. Man setze eine Masse N, die so groß als m seyn soll, habe die Geschwindigkeit c; so verhalten sich die Grössen der Bewegungen

von M: von N = C : c (101)
von N: von m = M : m (102)

---

von M: von m = MC : mc (Arithm. V; 50)

oder die Grösse der Bewegung verhält sich wie das Product aus der Masse in die Geschwindigkeit.

Stoß

Stoß harter Körper.

104. Lehrs. Die beyden Massen (103) sollen vollkommen hart seyn, und mit ihren Geschwindigkeiten gerade gegen einander stossen; Es sollen sich aber die Geschwindigkeiten verkehrt, wie die Massen verhalten, also MC = mc seyn. Ich behaupte beyde Massen werden einander, wo sie zusammenstossen, aufhalten, und jede der andern Bewegung völlig aufheben.

Bew. Vermöge der Voraussetzung, und (103) hat eine so viel Bewegung als die andere, und beyde Bewegungen sind einander entgegengesetzt; Es kann also wegen der angenommenen Härte der Massen, keine von beyden Bewegungen fortgesetzt werden, ohne daß die andere aufgehoben würde. Daher werden beyde, als entgegengesetzte, sonst gleiche Grössen, einander aufheben.

105. Zus. Dieses müßte plötzlich, sobald die Körper zusammenstossen, geschehen, denn sobald die Körper einander berühren, kann keiner weiter fort, ohne den andern zurückzutreiben, und keiner kann den andern zurücktreiben; Ehe sie aber einander berührten, war keiner des andern Bewegung hinderlich.

106. Anm. Beym Gleichgewichte am Hebel (Stat. 51) waren ein paar Massen in die Umstände gesetzt, daß sie einander deßwegen nicht bewegten, weil sie im Fall einer Bewegung, gleichgrosse entgegengesetzte Bewegungen haben müßten: dort also entstand keine Bewegung, weil gleichgrosse entgegengesetzte nicht zugleich entstehen konn-

ten; hier hört die Bewegung auf, weil gleichgroſſe entgegengeſetzte, die vorhanden waren, nicht zugleich fortgeſetzt werden können.

107. Zuſ. Wäre aber einer von beyden Körpern oder wären ſie alle beyde weich, wie wenn man Klumpen von naſſen zuſammenhängendem Thone gegen einander triebe, ſo würden die Theile, die zuerſt in Berührung kommen, einander ausweichen, ein Körper würde in den andern einen Eindruck machen, und die Geſtalten der Körper würden ſich dadurch ändern: dieſe Veränderungen hervorzubringen, die Theile aus ihren vorigen Stellen zu treiben, gehört Kraft, uud jeder Körper alſo, der dergleichen bey dem andern thut, wird dadurch ſelbſt Veränderungen in ſeiner Bewegung leiden (1. Abſchn. 26). Alſo kann ſich jedes Körpers Bewegung nach und nach ändern, und endlich verſchwinden.

108. Zuſ. Weiche Körper nun würden in den Umſtänden, in die ſie ſich vermöge (107) gebracht hätten, beyſammen bleiben; Federharte aber, werden wieder die vorige Geſtalt und Lage der Theile zu erhalten ſuchen. Es ſey vor dem Stoſſe, f der Kugel M; g, der Kugel m, Durchmeſſer, daß alſo die Linie durch beyde Mittelpuncte und den Berührungspunct im Anfange des Stoſſes AC, = f + g ſeyn würde, wenn dieſe beyden Kugeln ohne Stoß an einander gelegt würden, oder auch, wenn ſie vollkommen hart wären. Wären ſie aber federhart (wie z. E. elfenbeinerne Billardbälle), ſo ward bey B durch den Stoß jede etwas platt, und AC ward kleiner als f + g. Es iſt auch offenbahr, daß

man

man sich vorstellen kann, vom ersten Augenblick der Berührung an, seyen die Kugeln, eine gewisse kleine Zeit, immer mehr und mehr gegen einander gegangen, und haben einander, da wo sie sich berührten, immer plätter, und plätter gedruckt, dieses wird so lange dauern, als jede Kugel noch eine Bemühung anwendet, nach ihrer Richtung weiter fortzugehen, und so lange wird AC immer kleiner und kleiner werden. Wie aber diese Bemühung jeder Kugel durch die ähnliche entgegengesetzte der andern immer vermindert wird, so kann man voraussetzen, daß sie einmahl aufhören werde, da denn AC am kleinsten seyn wird, alsdenn wird jeder Kugel Federkraft sich bestreben, die platte Gestalt, welche ein Theil der Kugel bekommen hatte, wieder in die vorige runde zu verwandeln. Daraus folgt nothwendig, daß jede Kugel in die andere so wirkt, daß sich AC von der kleinsten Länge, die es zuletzt gehabt hatte, wieder vergrössert; Sind nun beyde Kugeln vollkommen federhart, so bekommen beyde ihre vorige Gestalt vollkommen wieder, und die beschriebene Wirkung jeder in die andere dauert also so lange, bis wiederum $AC = f + g$ geworden ist.

109. Zus. Diese Wirkungen aber müssen in der Geschwindigkeit jeder Kugel noch etwas anders verursachen, als was da wo sie sich nicht ereigneten, bey blos harten, oder weichen Kugeln, statt fand. Man wird also nicht schliessen dürfen, daß auch die federharten ihre Bewegung völlig verlieren. Weil sich die Bewegungen, die bey ihnen nach dem Stof-

se statt finden, in der Folge eben so leicht und deutlich allgemeiner werden bestimmen lassen, so will ich mich damit hier bey dem besondern Falle, da sich die Massen verkehrt, wie die Geschwindigkeiten verhalten, nicht weitläuftiger einlassen. Was ich 108; 109; gesagt habe, ist nur in der Absicht vorgebracht worden, zu zeigen, warum bey federharten Körpern etwas anders erfolgen kann, als bey unelastischen. Da ferner die Betrachtungen dieser beyden Absätze nicht auf die verkehrte Verhältniß der Geschwindigkeiten und der Massen gegründet sind, so werde ich diese Betrachtungen in der Folge auch bey allgemeineren Untersuchungen zum Grunde legen können.

110. Aufg. Zweene unelastische Körper 38. Fig. deren Massen M, m, heissen, begegnen einander gerade mit den Geschwindigkeiten C, c, die sich wie man will verhalten können. Man sucht ihre Bewegungen nach dem Stosse.

Aufl. Wenn die entgegengesetzten Bewegungen nicht gleich sind, wie in 104; so sey der hier zuerst genannten Masse ihre grösser, oder $M.C > m.c$.

Man setze die Geschwindigkeit $C = \frac{m}{M}.c+h$; so ist der Masse M ihre Bewegung $= mc + Mh$. Von dieser Bewegung wird der Theil mc durch die gleiche entgegengesetzte Bewegung der Masse m aufgehoben. Also behält M noch die Bewegung Mh übrig, mit der sie in ihrer Richtung fortgehen will. Die Masse m aber liegt in dieser Richtung vor ihr,

denn

denn beym Stosse, waren beyde Massen aneinander, und hier ist nichts vorhanden, das sie getrennt hätte. Diese Masse ist zwar nun bewegungslos, denn ihre Bewegung war durch den entgegengesetzten gleichen Theil der Bewegung der Masse M aufgehoben worden, aber sie ist noch träg, und kann also von der Masse M nicht ohne Anwendung einiger Gewalt vor sich fortgeschoben werden. Weil diese Gewalt angewandt werden muß, so wird die Masse M sich nicht mit der Geschwindigkeit bewegen können, mit der sie sich bewegen würde, wenn nach dem Stosse, m plötzlich vernichtet würde, und also M nichts vor sich fortzuschieben fände. Wie sie sich fortbewegt, wird sich so beurtheilen lassen: weil nur die Bewegung M.h vorhanden ist, die Massen aber, welche zusammen fortgehen müssen, indem eine die andere vor sich herschiebt, M + m sind, so kann man sich vorstellen M.h sey die Grösse der Bewegung in einer Masse = M + m. Dieser gesammten Masse Geschwindigkeit heisse x; so ist

$$(M+m).x = M.h \text{ oder } x = \frac{Mh}{M+m} (103) = \frac{MC-mc}{M+m}.$$

Mit dieser Geschwindigkeit werden also nach dem Stosse beyde Massen zusammen, nach der Richtung fortgehen, nach welcher zuvor die ginge, welche die größte Bewegung hatte.

111. Zus. In der Voraussetzung 104. wird $x = 0$ aber verneint, wenn man $mc > MC$ setzte. Alsdenn nähmlich würde M von m überwältigt, und müßte nach der Richtung, die m zuvor hatte, rückwärts

wärts gehen. Die verneinte Geschwindigkeit zeigt an, daß sie nach dem entgegengesetzten Wege gerichtet ist; bejaht zeigte sie, daß M mit ihr den Weg ferner fortsetzte, nach welchen es vor dem Stosse gegangen war.

112. Zus. War m vor dem Stosse ruhig, so ist $c = o$ und die gemeinschaftliche Geschwindigkeit nach dem Stosse $= \frac{M.C}{M+m}$.

113. Zus. Es sey $M = \infty$ so ist $\frac{1}{M+m} = \frac{1}{M} - \frac{m}{MM}$ also, mit Weglassung unendlich kleiner der höhern Ordnungen, $x = c - \frac{m.(C+c)}{M}$. Die unendlich grosse Masse, leidet nähmlich einen unendlich kleinen Abgang ihrer Geschwindigkeit, und wenn sie ruhete, also $C = o$, so bekömmt sie nach der Richtung, nach der m an sie anstieß, eine unendlich kleine Geschwindigkeit $\frac{mc}{M}$. Eine Erläuterung hievon möchte geben, wenn man mit einem Hammer an einen grossen Felsen schlägt.

Jeder Stoß bewegt also jede Masse, nur zuweilen mit sehr kleiner, oder gar verschwindender Geschwindigkeit. Etwas ähnliches ist in (81) angezeigt.

114. Aufg. Die beyden Massen (110) bewegen sich mit ihren Geschwindigkeiten, nicht nach entge-

gen-

gengesetzten Richtungen, sondern beyde nach einerley Richtung, und M der Masse m nach, mit grösserer Geschwindigkeit. Also wird m von M eingehohlt; Man sucht die Geschwindigkeit nach dem Stosse.

Aufl. M wird sich bestreben, der langsamern Masse m Geschwindigkeit zu vergrössern: dadurch wird M etwas von seiner Bewegung verlieren, aber nicht mehr als m gewinnt, weil M nichts weiter wirkt, als m zu beschleunigen, und ohne Wirkung keine Bewegung verlohren gehen kann. Diese Wirkung der Masse M in m wird so lange dauern, bis der Masse m anfängliche Geschwindigkeit so viel zugenommen, und der Masse M ihre soviel abgenommen hat, daß nun beyde Massen sich mit einerley Geschwindigkeit x bewegen; denn wenn m so schnell vorausgeht, als M nachfolgt, so ist offenbahr, daß keines mehr in das andere wirkt. Nun hat also die Masse M + m zusammen die Geschwindigkeit x; und folglich die Bewegung (M + m) x, welche = MC + mc seyn muß, weil von der Bewegung nichts verlohren gegangen, sondern nur etwas aus der Masse M in die Masse m übergegangen ist. Folglich ist $x = \frac{M.C + m.c}{M + m}$.

115. Zus. Diese Formel wird aus der 110; wenn man dorten die Geschwindigkeit der Masse m verneint setzet, welches so viel sagen will, daß ihre Richtung in gegenwärtigem Falle der Richtung im vorigen entgegengesetzt ist. Ich habe aber geglaubt, daß die wenigen Schlüsse, mit denen sich gegen-

wärtige

wärtige Auflösung aus den ersten Gründen herleiten läßt, hier schon ihre Stelle verdienten.

116. Zus. Man könnte hier die Schwürigkeit finden, daß diese Formel (114) einen Werth für x zu geben scheint, auch wenn c so groß, oder grösser als C wäre, da doch kein Stoß erfolgen kann. Wenn $c = C$, so giebt sie $x = C$, eine offenbahre Wahrheit. Wollte man aber $c > C$ setzen, so muß man überlegen, daß in der Formel M, C, m, c, völlig alle auf einerley Art enthalten sind, und also nichts ist, das in ihr die vorhergehende Masse von der folgenden unterscheidet. Es ist also ganz willkührlich m für die vorhergehenden anzunehmen, und wenn man $c > C$ setzen wollte, würde man nur die Benennungen ändern, und die vorhergehende M nennen müssen.

117. Zus. Wenn $M = m$; so ist die Geschwindigkeit nach dem Stosse $= \frac{1}{2}.(C-c)$ in (110) und $= \frac{1}{2}.(C+c)$ in (114); oder wenn die Massen gleich sind, ist sie beym Begegnen die halbe Summe, und beym Folgen der halbe Unterschied der Geschwindigkeiten vor dem Stosse.

118. Zus. Wenn in (110) $C = c$; so ist die Geschwindigkeit nach dem Stosse $= \frac{(M-m).c}{M+m}$ oder sie verhält sich zu der Geschwindigkeit, die jeder Körper vor dem Stosse hatte, wie der Massen Unterschied zu ihrer Summe.

119. Zus. In 114. verliehrt M die Geschwindigkeit $C-x = \frac{m.(C-c)}{M+m}$ und m gewinnt die Geschwindigkeit

digkeit $x-c=\frac{M.(C-c)}{M+m}$; also verhalten sich, die verlohrne und die gewonnene Geschwindigkeit verkehrt wie die Massen.

120. Zus. Daß in 114; M so viel Bewegung verliehrt als m gewinnt, ist schon daselbst angenommen worden. Daher ist auch $(M+m).x = MC+mc$ die Bewegung nach dem Stosse so groß als die Summe der Bewegungen vor dem Stosse, und es bleibt folglich einerley Grösse der Bewegung, wenn die Körper einander folgen. Daß aber nicht allemahl einerley bleiben kann, wenn sie einander begegnen, erhellt aus 104; und weil in 110; $(M+m).x = MC-mc$, so ist da die Bewegung nach dem Stosse, der Unterschied der Bewegungen vor dem Stosse.

121. Zus. Die Veränderung, welche M in seiner Bewegung leidet, oder was übrig bleibt, wenn man seine Bewegung nach dem Stosse, von der vor dem Stosse abzieht, ist beydemahl $M.(C-x)$; wo man statt x nur jedesmahl seinen Werth setzen muß.

122. Zus. Bey folgenden Körpern, in 114. ist die Veränderung der Bewegung, welche m leidet, oder, was übrig bleibt, wenn man seine Bewegung vor dem Stosse, von der nach dem Stosse abzieht, offenbahr $m.(x-c)$, von der aus 119; 120; erhellt, daß sie der Veränderung der Bewegung gleich ist, welche M leidet.

123. Zus. Aber bey begegnenden Körpern (110) muß man die Veränderung der Bewegung, welche

m leidet, folgendergestalt betrachten: Die Geschwindigkeit m, welche m der Richtung von M entgegen hatte, wird völlig aufgehoben, und eine neue $=x$ nach der Richtung erzeugt, die M hat, und die der vorigen Richtung der Geschwindigkeit c, entgegengesetzt ist; oder m verliert die Bewegung mc, und bekömmt die Bewegung mx. Die völlige Aenderung also, welche die Bewegung von m leidet, ist $mc+mx$; Aber aus 110 ist hier $Mx+mx=MC-mc$ oder $m.(c+x)=M.(c-x)=$ der Veränderung der Bewegung, welche M leidet (121).

Daß dieses auch noch statt findet, wenn $M=\infty$ erhellt aus 113, weil da $M(C-x)=m.(C+c)$ und $m.(c+x)=m.(c+C)$. Wenn sich nähmlich des unendlichen Körpers Geschwindigkeit unendlich wenig ändert, so gibt dieses eine endliche Aenderung seiner Bewegung.

124. Zus. Sowohl bey folgenden als bey begegnenden Körpern leiden beyde Massen gleiche Veränderungen ihrer Bewegung.

Wirkung und Gegenwirkung.

125. Wegen der Trägheit (1. Abschn. 25.) kann kein Körper in dem andern eine Veränderung hervorbringen, ohne selbst eine zu leiden. Wie man nun die Veränderung, die der wirkende Körper leidet, als eine Gegenwirkung des leidenden ansieht (1. Abschn. 23), so sagt man; die Gegenwirkung sey der Wirkung gleich (actio aequalis reactioni) das ist: Ein Körper, der in den andern wirkt, lei-

det eben deßwegen eine Veränderung, weil er wirkt: Folglich ist die Veränderung, die er leidet, weder grösser noch kleiner, als seine Wirkung: Nicht kleiner, sonst wäre ein Theil seiner Wirkung ohne Veränderung in ihm; nicht grösser, denn wenn er nur Veränderung leidet, weil er wirkt, so läßt sich kein Grund von einer grössern Veränderung, als seine Wirkung ist, angeben.

126. Wenn ein Körper in den andern wirkt, und die Veränderung gelitten hat, welche man als des andern Gegenwirkung ansieht, so kann man sich vorstellen, es sey dadurch des andern Trägheit aufgehoben, und er lasse sich nun von dem ersten, als wenn er nicht mehr träg wäre, bewegen. Man macht sich nähmlich von der Trägheit des andern Körpers, blos die Vorstellung, daß sie aufgehoben zu werden, eine gewisse Veränderung des ersten erfodere (I. Abschn. 23.), ist also diese Veränderung erfolgt, so ist die Trägheit aufgehoben.

127. Ein Pferd, dessen Kraft so stark ist, daß es aufs höchste 10 Centner ziehen könnte, ist an einen Stein gespannt, der 8 Centner wiegt. Hier stellt man sich nun vor, das Pferd wirke mit 8 Centnern, mit $\frac{4}{5}$ seiner Kraft, in den Stein, und das Seil, vermittelst dessen es angespannt ist, ziehe wegen seiner Spannung das Pferd eben so stark gegen den Stein zurück; und benimmt dadurch dem Pferde $\frac{4}{5}$ seiner Kraft: das Pferd geht also dergestalt fort, als ob es nur noch 2 Centner, oder $\frac{1}{5}$ seiner vorigen Kraft hätte; und der Stein folgt

ihm

ihm so nach, als ob er nun nicht mehr träg wäre, keine Gewalt mehr erfoderte fortgeführt zu werden. Ein Pferd nähmlich, daß nur dieses $\frac{1}{5}$ Kraft hätte, und einen blossen geometrischen Körper nach sich zöge, würde eben so fortgehn, wie das Pferd, das die ganze Kraft hat, und den vorerwähnten Stein nach sich zieht.

So läßt sich eins von den Exempeln erläutern, das Newton Princ. Leg. mot. 3. zu Erläuterung des Satzes giebt: daß der Wirkung allemahl eine gleiche Gegenwirkung entgegengesetzt ist, oder zweener Körper Wirkungen allemahl gegenseitig, gleich, und einander entgegengesetzt sind.

128. Man muß hiebey vornehmlich bemerken, daß nicht alle Gewalt des wirkenden Körpers, in den andern wirkt, so wie man die Wirkung des Pferdes in den Stein nicht 10 sondern 8 Centnern gleich setzen muß. Die Gegenwirkung hebt von der Gewalt des wirkenden Körpers nur den Theil auf, der zur Wirkung angewandt ward; mit dem Reste wird die Bewegung fortgesetzt, daß nun keine Gegenwirkung mehr in Betrachtung kömmt. Was dieß alles sagen will, wird aus 125; 126; offenbahr seyn.

129. Das bisherige gehört noch zur Lehre von der Trägheit im I. Abschn. und erfoderte gegenwärtige Erläuterung, weil die hier erklärten Redensarten bey Untersuchung des Stosses gebraucht werden. Oefters werden sie auch gemißbraucht, man findet Naturforscher, die sich die Gegenwirkung als

etwas vorstellen, das in der That dem Körper, der stößt, entgegen stiesse, und Bewegungen, die der Richtung seines Stosses entgegengesetzt sind, hervorbrächte. Sie legen leicht zu bewegende Körperchen, Sand u. d. g. (Bleykugeln oder Schroot sind dazu fast noch besser) nahe an den Rand eines Tellers, geben dem Teller an der entgegengesetzten Stelle einen Schlag, und finden alsdenn, was auf ihm lag, näher als zuvor bey dieser Stelle: da bilden sie sich ein, was auf dem Teller lag, habe durch die Gegenwirkung, eine Bewegung der Richtung des Schlages entgegen bekommen, und sey dieserwegen nach der Stelle, wo der Schlag geschahe, zugegangen; Sie bedenken aber nicht, daß der Teller dem Schlage schneller gehorsamt hat, als sich die Wirkung desselben in das, was auf dem Teller lag, fortpflanzen konnte, daß also eigentlich dieses liegen geblieben, und der Teller darunter fortgegangen ist, also sich die geschlagene Stelle des Tellers dem, was darauf lag, nicht dieses ihr, genähert hat. In unterschiedlichen Sammlungen mathematischer und anderer Spielwerke, findet sich ein ähnliches Kunststück. Man legt auf ein Glas eine hölzerne Scheibe und darauf ein Stück Geld. Man schlägt die Scheibe geschwind vom Glase weg, so fällt das Geld in das Glas. Schwenter mathem. Erquikst. 10. Th. 19. Aufg. wo man noch mehr solche Künste antrifft, deren einige auch von Naturforschern als Beweise ihres unrichtigen Begriffs von der Gegenwirkung sind angeführt worden. Ein Kind pflegt wohl die Stelle des Erdbo-

dens, auf die es gefallen ist, oder den Tisch, an dem es sich mit dem Kopfe gestossen hat, zu schlagen. Ich vermuthe indessen nicht, daß ein Kind für sich allein vermögend wäre, einen so tiefsinnigen Schluß zu machen, daß ein Ding etwas thut, wenn es weiter nichts thut, als mir nicht ausweichen, d. i. das es etwas thut, wenn es weiter nichts thut, als etwas nicht thun. Das Kind lernet ohne Zweifel diesen Schluß, wie andere erste Gründe seiner Philosophie, von seiner Wärterinn; und eben weil die Wärterinn keine rechte gründliche Philosophinn war, so hatte sie nicht daran gedacht, daß dieses thun, nur eine Gegenwirkung ist, sonst würde sie dem Kinde begreiflich gemacht haben, daß es den Tisch selbst gestossen hatte, und der Tisch eben so viel Recht hätte, es wieder zu schlagen.

130. Auch bessere Naturforscher, als die, welche so gröblich irren, scheinen mir sich von der Wirkung und Gegenwirkung nicht allemahl vorsichtig genug ausgedruckt zu haben, wenn sie als Exempel davon solche anführen, die meiner Einsicht nach dazu nicht eigentlich gehören. Newton bringt an der 127. angef. Stelle, zwar nichts vor, wobey sich eine solche Erinnerung machen liesse, aber mir scheint nicht, daß er mit Recht aus diesem Satze das gegenseitige Anziehen der Weltkörper herleite; Princ. L. III. Pr. 5. cor. 1. Dieses folgt meines Erachtens nur aus der Voraussetzung, daß alle Materie anzieht, und alle Weltkörper aus Materie bestehen. Zwar alsdenn gebe ich gern zu, daß das Anziehen gegen-

seitig

seitig seyn müsse, wenn man es sich so vorstellt, wie wenn ein Pferd vermittelst eines Strickes einen Stein zieht: da werde ich aber mich darüber wie in 127. erklären. Sollte das, was wir Anziehen nennen, eine Erscheinung seyn, die etwa von dem Stosse einer Materie herrührte, wie man sich bey der Schwere auf unserer Erde, beym Magnete, gern hat vorstellen wollen, so sehe ich nicht, warum nicht eine solche Materie nur den angezogenen Körper gegen den anziehenden treiben könnte, ohne den leßten auch gegen den ersten zu treiben, warum sie nicht das Eisen nach dem Magnete treiben könne, ohne den Magnet gegen das Eisen zu treiben? Ich weiß wohl, daß alle bekannten Anziehungen, die magnetischen, die elektrischen, die chymischen, u. s. w. gegenseitig sind, ich behaupte nur, daß dieses aus der Erfahrung, nicht aus dem erwähnten Grundgesetze der Bewegung hergeleitet werden muß, daher ich nicht glaube, daß Gravesand El. Phys. L. l. c. 16. mit Recht den Magnet zu Bestätigung dieses Grundgesetzes gebraucht hat.

131. In der 125. erklärten Bedeutung also, kann ich sagen, daß bey den Körpern M, m, die vorhin betrachtet worden, Wirkung und Gegenwirkung gleich sind. Was nähmlich M wirkt ist eine Veränderung der Bewegung in m; diese Veränderung ist so groß, als diejenige, welche M selbst leidet (124). Also kann die Veränderung, welche M leidet, der Gegenwirkung von m zugeschrieben werden. Sähe man m als den wirkenden Körper an, so würde er nicht mehr Veränderung in M hervor-

bringen, als er selbst leidet, und das liesse sich der Gegenwirkung des M zuschreiben. Es ist also gleichgültig, welchen man als den wirkenden und welchen man als den gegenwirkenden ansehen will. Dieses findet selbst in dem Falle statt, wenn m ruhete, da man nach den bisherigen Vorstellungen, den Verlust der Bewegung, den M leidet, als eine Wirkung von m ansehen kann. Hätte M ruhig gelegen, und m wäre mit der Geschwindigkeit c daran gestossen, wäre aus 110; wie in 112; die Geschwindigkeit nach dem Stosse $\frac{mc}{M+m}$; setzt man nun $c=C$; so bekäme M eine Bewegung $\frac{MmC}{M+m}$ nach der Richtung, nach der sich m bewegt, das ist, nach einer Richtung die der, nach welcher vorhin M an das ruhende m anstiesse, entgegengesetzt ist. Diese Bewegung also, welche jetzo das ruhende M bekömmt, ist so groß als die, welche vorhin das bewegte M verlohr; und wie der letztere Verlust die Bewegung verminderte, welche M nach einer gewissen Gegend hatte, so ist die Bewegung, welche jetzt im ruhenden M entsteht, als eine Verminderung der Bewegung o nach eben dieser Gegend, als eine Verminderung einer Bewegung, welche M nach dieser Gegend haben könnte, anzusehn. Also leidet das bewegte M, wenn es an das ruhende m mit der Geschwindigkeit c stößt, eben so viel Verminderung seiner Bewegung, als das ruhende M leidet, wenn m, mit der Geschwindigkeit c daran stößt, nur nach

den

den Begriffen der entgegengesetzten Grössen, die Bewegung, die hier entsteht, als eine Verminderung unter o angesehen. Wenn also M mit einer gewissen Geschwindigkeit an das ruhende m stößt, so geschieht eben das, was geschehen würde, wenn m mit eben der Geschwindigkeit an das ruhende M stiesse, und dieses wird zeigen, wie man auch hier behaupten kann, es sey gleichgültig, ob man den ruhenden oder den bewegten Körper für den wirkenden annehmen will.

Stoß elastischer Körper.

132. Grundſ. Wenn m nicht vollkommen hart ist, so wird durch eben die Wirkung, welche M in m ausübt, die Bewegung von m zu verändern, auch die Gestalt von m an der Gegend, wo beyde Körper einander berühren, verändert.

Ich setze zum voraus, daß die Richtung des Stosses durch des Körpers M Schwerpunct geht, der in der Linie BC liegen mag (96). Wäre nun m vollkommen hart, und beyde Körper berührten einander in B, so wäre, wofern die Körper einander begegnen, der Erfolg der Wirkung des Körpers M dieser, daß die Geschwindigkeit, mit welcher sich der Schwerpunct nach der Richtung CB bewegen will, vernichtet, und in eine nach der entgegengesetzten Richtung BC verwandelt würde, welches plötzlich geschehen muß, wie in (105). Ist aber m nicht vollkommen hart, so wird der Theil von m, wo die erste Berührung bey B geschieht, auszuwei-

chen suchen, welches nicht anders geschehen kann, als daß er nach der Gegend zurückgeht, nach welcher in Absicht auf ihn, der Schwerpunct von m liegt; weil aber der Körper m doch nicht flüssig ist, folglich seine Theile zusammenhängen, so wird dieser rückwärts gehende Theil, andere mit sich nachziehen, andere vor sich schieben, und dadurch der Bewegung, welche der Schwerpunct nach der Richtung CB fortsetzen wollte, hinderlich fallen: So wird also dieses Schwerpunctes Geschwindigkeit, durch eben die Wirkung vermindert, vermöge der sich, mit dem beschriebenen Zurückweichen des Theiles bey B, die Gestalt des Körpers m an dieser Stelle ändern wird. Dauret nun die Wirkung des Körpers M in m noch länger, so kommen immer mehr Theile von m, mit M in Berührung, und des Körpers m Gestalt wird immer mehr und mehr geändert; diese Theile alle aber, indem sie auf die vorbeschriebene Art ausweichen, hindern die Bewegung des Schwerpunctes nach der Richtung CB immer mehr und mehr; und wenn solche endlich gar vernichtet ist, und die Theile bey ihrem Ausweichen sich doch immer nach der Seite, wo C liegt, zu ziehen müssen, so treiben sie zugleich den Schwerpunct endlich nach eben dieser Seite zu gehen.

Wenn m dem M nicht begegnet, sondern von ihm eingehohlet wird, und die Theile von m, welche zuerst in die Berührung kommen, dem schneller als sie folgenden M ausweichen, und dadurch nach der Gegend C zu, in den Körper m hineingetrie-

werden,

werden, so beschleunigen sie eben dadurch des Schwerpuncts Gang nach dieser Gegend.

Was bey begegnenden Körpern von m gesagt ist, läßt sich offenbahr auch von M sagen, wenn dieses ebenfalls nicht vollkommen hart ist. Folgt M, dem m schneller nach, als ihm m ausweicht, so werden dadurch die Theile von M, die mit m in Berührung kommen, zurücke in M gedrückt, und der Gang von M wird dadurch ebenfalls verhindert, und seine Geschwindigkeit kleiner gemacht.

Diese Erläuterungen schienen mir nöthig, vollkommen deutlich zu machen, daß bey Körpern, die nicht gänzlich hart sind, einerley Wirkung ihre Gestalt, und ihre Bewegungen ändert.

133. Zus. Die Wirkung jedes Körpers in den andern, ist die Aenderung der Bewegung, die er leidet, und in einem so groß als in dem andern (131).

Man begreift leicht, daß hieraus nicht zu schliessen ist, daß die Aenderung der Gestalt in beyden Körpern gleich groß seyn müßte. Denn auserdem, daß sich überhaupt nicht sagen läßt, worinnen die Grösse einer solchen Aenderung bestehe, und also der Ausdruck in dieser Allgemeinheit gedankenleer seyn würde, so könnte auch ein Körper wegen grösserer Härte u. d. g. seine Gestalt schwerer als der andere ändern lassen, und also würde einerley thätige Wirkung, bey beyden doch verschiedene Folgen haben können.

134. Aufg. M und m 110; sind nun vollkommen elastische Körper, sonst alles wie vorhin; man sucht ihre Geschwindigkeiten nach dem Stosse.

Aufl. I. Es ist klar, daß während des ganzen Stosses, die Wirkung des einen Körpers in den andern, und die elastische Kraft des andern beständig gegen einander streiten; weil es aber nicht so leicht ist, die Veränderungen, die hier nacheinander folgen, deutlich zu übersehen, so kann man sich den Stoß, wie er bey vollkommen harten Körpern seyn könnte, als vollendet vorstellen, und nachgehends betrachten, was die elastische Kraft in seinen Folgen ändert. Es ist nähmlich einerley, ob diese Aenderung am Ende ganz betrachtet wird, oder ob die einzelnen Aenderungen, aus denen sie nach und nach entsteht, zusammen gerechnet werden, wie es einerley ist, ob ich am Ende des Jahres meine ganze Ausgabe diese Zeit über, von der Einnahme abziehe, oder ob ich diesen Rest mühsamer durch Abziehung jeder einzelnen Ausgabe gefunden hätte. Ein ähnliches Verfahren ist I. Abschn. 61. beobachtet worden.

II. Ich stelle mir also die beyden Körper 38. F. in B an einander liegend in den Umständen vor, in denen sie nach dem Stosse (110) bleiben würden, wenn sie nicht elastisch, sondern nur weich wären. Alsdenn hätte jeder seine Gestalt etwas geändert, wenn es z. E. Kugeln wären, so wären sie an B an einander platt gedrückt. Ihre Geschwindigkeit aber, würde wie bey ganz harten Körpern seyn.

III. Diese

III. Diese Veränderung der Gestalt, die einer von dem andern, ich will setzen m von M gelitten hatte, rührte von der Würkung des Körpers M in m her (132; 133), da sich nun wegen der vollkommenen Federkraft, die Gestalt in m wie zuvor wieder herstellen soll, so müssen die Theile von m, die wegen dieser Wirkung auf die 132. beschriebene Art sind in m hineingedrückt worden, ihre vorige Stellen in Absicht auf den Körper m, (nicht eben in Absicht auf den absoluten Raum I. Abschn. 3.) wieder einzunehmen suchen, daß der ganze Körper m wieder seine vorige Gestalt bekömmt, ob er gleich selbst vielleicht auf einem andern Platze wäre. Dieses Bestreben, bey den erwähnten Theilen, setzt, wenn es vollendet werden soll, eine Wirkung zum voraus, von der die Wirkung völlig aufgehoben wird, welche die Theile in ihren bisherigen gewaltsamen Zustand gebracht hatte, eine Wirkung also, welche der Wirkung des Körpers M in m, gleich aber entgegengesetzt ist; da nun die Wirkung des Körpers M in m darinnen bestund, in m die Veränderung der Bewegung m.(c+x) hervorzubringen (123), so muß die jetzt erwähnte Wirkung der Theile, die sich wieder herstellen, eben so viel Bewegung im Körper M hervorbringen, so viel Bewegung der Körper M in m hervorgebracht hatte, sie in ihren gewaltsamen Zustand zu versetzen; diese Bewegung aber, die sie in M hervorbringen, muß eine Richtung haben, die der Richtung entgegengesetzt ist, nach welcher M in m wirkte: Nach der letzten Richtung nähmlich wirkte M um die Theile aus ihrer ersten Lage

in eine gewaltsame zu bringen, also müssen die Theile, wenn sie sich wieder in ihre erste Lage bringen sollen, nach der entgegengesetzten Richtung wirken. Indem sie nähmlich sich wieder in diese Lage zu bringen suchen, so stossen sie eben so gegen M, wie M gegen sie stieß, als es sie in die gezwungene Lage brachte.

IIII. Die Federkraft des Körpers m, benimmt also dem Körper M, von der Bewegung, mit der er nach seiner anfänglichen Richtung fortgehen wollte, so viel, so viel die Wirkung des Körpers M in m beträgt, diese Wirkung ist in 123. angegeben; und wenn man sie von der Bewegung abzieht, die der Körper M nach dem Stosse hätte, wenn m ohne Federkraft wäre, so kömmt die Bewegung des Körpers M nach dem Stosse in gegenwärtigem Falle aus 123; $Mx - M.(C - x) = M.(2x - C) =$

(110) $\frac{M.[(M-m).C-2mc]}{M+m}$.

V. Folglich die Geschwindigkeit (103)

$\frac{(M-m).C-2mc}{M+m}$.

VI. Was die Federkraft von M in m verändert, wird man auf ähnliche Art folgendergestalt berechnen: In M wurden ebenfalls Theile, vermöge der Wirkung zusammengedruckt, die m in M ausübte, und sie üben bey ihrer Wiederherstellung eben die Wirkung in m aus; da sie nun bey ihrer Wiederherstellung, nach eben der Gegend, wo C hinliegt, wirken, nach der m so schon nach dem Stosse gehen

wollte,

wollte, so vermehrt ihre Wirkung die Bewegung, die m nach dem Stosse hätte, wenn M ohne Federkraft wäre: Also ist die Bewegung die m nach dem Stosse hat, wenn die Federkraft von M zugleich wirkt $mx + m.(c+x)$ (123) $= m.(c+2x) = \frac{m.[(M-m).c+2MC]}{M+m}$ (110).

VII. Also die Geschwindigkeit (103) $\frac{(M-m).c+2MC}{M+m}$.

135. Aufg. Elastische Körper M und m folgen einander, das übrige ist alles wie in 114. Man sucht ihre Geschwindigkeiten nach dem Stosse.

Aufl. I. Eben solche Betrachtungen, wie die vorigen, zeigen, daß die Federkraft von m, in der Bewegung, welche die andere Masse nach dem Stosse hatte, wofern keine Federkraft vorhanden wäre, so viel vermindert, so viel dieser andern Masse Wirkung in die genannte betrug. Aus 131; 122; ist diese Wirkung $m.(x-c)$ und aus (114) die nur genannte Bewegung $\frac{M.(MC+mc)}{M+m}$. Wenn man jenes von diesem abzieht, und den Werth x aus 114. an seine Stelle setzt, so gibt sich die Bewegung, welche M nach dem Stosse hat, wofern m, federhart ist, und diese Bewegung mit ihrer Masse dividirt, gibt des Körpers M Geschwindigkeit $\frac{(M-m).C+2mc}{M+m}$.

II. Der

II. Der Masse M Federkraft vergrössert auf eben die Art der Masse m Bewegung, die aus 114. zu nehmen ist, um so viel als der letztern Masse Wirkung in die erste nach 122. betrug, daraus findet man eben so des Körpers m Geschwindigkeit

$$\frac{(m-M).c+2MC}{M+m}.$$

III. Man begreift, daß die Geschwindigkeit in I. aus 134; V; und die in II. aus 134; VII; wird, wenn man c in 134. verneint setzt, eben wie in 115.

136. Zus. Die Rechnung nahm an, daß nach dem hier betrachteten Stosse, beyde Körper in beyden Fällen, des Begegnens und des Folgens, nach der rechten Hand dessen, der die 38. F. ansieht, gingen. Solchergestalt setzt M in beyden Fällen seine Bewegung in der Richtung fort, die es vor dem Stosse hatte, m aber thut solches nur im zweyten Falle des Folgens, im ersten Falle ändert es die Richtung, die es vor dem Stosse hatte, in die entgegengesetzte. Kömmt nun eine der hier berechneten Geschwindigkeiten nach dem Stosse, verneint heraus, so zeigt dieses an, daß der Körper, dem sie zugehört, die Richtung nehme, welche der jetzt erwähnten entgegengesetzt ist. Wenn also die Geschwindigkeit des M verneint wird, so wird M reflectirt, und geht wieder nach der Gegend zu, wo es hergekommen ist. Die Geschwindigkeit von m aber kann nie verneint werden, denn in 134; VII; ist $mc < MC$ (110) und in 135; II. ist $c < C$ (114). Gleichwohl sagt man auch mit Recht, m werde im

Falle

Falle des Begegnens reflectirt, weil es nach der Gegend, wo es vor dem Stosse herkam, zurückkehrt. Es würde dieses zwar auch ohne Federkraft thun, aber nicht so schnell, als wenn die Federkraft wirkt.

137. Zus. Wenn in 135; I; $M \gtrless m$, wird das erste nie reflectirt, auch nicht wenn $C \lessgtr 2c$, soll es aber auch für $C \gtrless 2c$ nicht reflectirt werden, so muß $m(C-2c) \gtrless M.C$ seyn. Sind diese beyden Producte gleich, so verschwindet der Zähler der Geschwindigkeit, oder M bleibt stehen.

138. Zus. Wenn $M=m$; so wird die Geschwindigkeit in 135; V; $=-c$, und die in 134; VII; $=C$; oder: Gleiche Massen, die einander begegnen, kehren von einander mit verwechselten Geschwindigkeiten zurück.

139. Zus. Ist also $c=0$, oder stößt eine Masse an eine ihr gleiche ruhende an, so bekömmt die, welche geruhet hatte, der anstossenden Geschwindigkeit, und die anstossende bleibt stehen.

140. Zus. Wären in 134; die Geschwindigkeiten vor dem Stosse gleich, so verhielten sich die nach dem Stosse; in V; VII; daselbst wie $M-3m : 3M-m$.

141. Zus. Wären in 134. die Bewegungen vor dem Stosse gleich, so wären die Geschwindigkeiten nach dem Stosse, in voriger Ordnung $-C$; c; oder jeder Körper kehrt mit seiner Geschindigkeit zurück. Er hatte nähmlich, ohne Federkraft seine ganze Bewegung verlohren, und bekömmt also durch die Federkraft eben dieselbe wieder, nur rückwärts.

142. Zus.

142. Zus. Wenn m an das ruhende M; und wenn M an das ruhende m stößt, so verhalten sich die Geschwindigkeiten, die dorten M, hier m, bekommen, aus 134; V; VII; wie $-mc : +MC$. Also verkehrt wie die Massen, wenn jeder der bewegten Körper mit einerley Geschwindigkeit an den andern ruhenden stiesse.

143. Zus. Wenn in 134. keine Reflection geschieht (136), so läßt die Geschwindigkeit des M (das. V.) von der Geschwindigkeit des m (das. VII.) abgezogen, $c+C$ oder der Unterschied der Geschwindigkeiten nach dem Stosse, ist so groß als die Summe derselben vor dem Stosse.

Es erhellt zugleich, daß m schneller vorangeht, als M nachfolgt, wie nöthig ist, wenn nur ein Stoß geschehen soll, weil sonst die Körper einander einhohlen und zum zweytenmahle stossen würden.

144. Zus. Wenn aber daselbst M reflectirt wird, so wird der Werth der Geschwindigkeit 134; V; verneint (136). Da nun das Verneinte blos die Richtung anzeigt, so ist die wirkliche Grösse der Geschwindigkeit von M nach dem Stosse, alsdenn der Ausdruck 134; V. mit entgegengesetztem Zeichen genommen. Solchergestalt zu der Geschwindigkeit 134; VII; bey welcher sich nichts ändert, addirt, muß er auch $c+C$ geben, weil er mit den Zeichen, wie sie 134; V; stehen, abgezogen, dieses gab (143). Hier also ist die Summe der Geschwindigkeiten nach und vor dem Stosse einerley. Wenn nähmlich hier jede Geschwindigkeit bejaht genommen wird.

145.

145. Zus. Wenn in 135; M nicht reflectirt wird, so ziehe man seine Geschwindigkeit (das. I.) von des m Geschwindigkeit (das. II.) ab; der Rest ist C − c; bejaht (114), also geht m nach dem Stosse, schneller voraus als M folgt, wie wieder zu Vermeidung eines zweyten Stosses nöthig ist, und die Unterschiede der Geschwindigkeiten nach und vor dem Stosse sind einerley.

146. Zus. Würde aber M reflectirt, so wäre der Ausdruck seiner Geschwindigkeit (135; I.) verneint; nähme man ihn nun mit entgegengesetzten Zeichen, um nur die Grösse der Geschwindigkeit, nicht ihre Richtung auszudrücken, so würde er auf diese Art zu der Geschwindigkeit 135; II; in der sich nichts ändert, addirt, eben das geben, was er, so wie er 135; I. steht, davon abgezogen, gab. Also ist vermöge (145) gegenwärtig die Summe der Geschwindigkeiten nach dem Stosse so groß, als der Unterschied derselben vor dem Stosse.

147. Diese Verschiedenheiten lassen sich folgendergestalt übersehen: Die Körper gingen vor und nach dem Stosse

I) nach verschiedenen Gegenden;	Da ist die Summe der Geschwindigkeiten vor und nach dem Stosse einerley 144.
II) – einerley Gegend	Da ist der Unterschied der G. vor und nach dem Stosse einerley 145.

III)

III) Vor dem Stosse nach verschiedenen, nach dem Stosse nach einerley Gegenden	Der Unterschied der Geschw. nach dem St. ist der Summe der G. vor d. St. gleich 143.
IIII) Vor dem Stosse nach einerley, nach dem Stosse nach verschiedenen Gegenden	Die Summe der G. nach dem St. ist dem Unterschiede der G. v. dem Stosse gleich 146.

148. Zus. Wenn man die beyden Bewegungen nach 134; IIII; VI; wie sie da stehen, zusammen rechnet, so ist ihre Summe = MC – mc; dieses gilt also für 147. III. (136).

149. Zus. Würde aber M reflectirt, so müsste man den 134; V; gefundenen Ausdruck seiner Geschwindigkeit, mit entgegengesetzten Zeichen nehmen (136), eben dieses also auch mit der Bewegung 134; IIII. thun, diese also von der Bewegung der Masse m 134; VI; abgezogen, gäbe eben das, was sie in 148 mit den Zeichen, wie sie 134; IIII; steht, addirt gäbe; oder der Unterschied der Bewegungen nach dem Stosse, wäre hier so groß als der Unterschied der Bewegungen vor dem Stosse. Für 147; I.

150. Zus. Wenn man aus den Geschwindigkeiten nach dem Stosse, wie sie in 135; I; II; berechnet sind, die Bewegung jeder Masse berechnet, und beyde Bewegungen zusammen addirt, so findet sich ihre Summe so groß als der Summe der Bewegungen vor dem Stosse. Hier muß M nicht reflectirt werden, und dieß gilt also für 147; II.

151. Zus.

151. Zus. Würde aber M reflectirt, so würde der Ausdruck seiner Bewegung, wie man solchen aus der Geschwindigkeit auf nur erwähnte Art fände, verneint, und wenn man, ohne Absicht auf die Richtung, welches das Verneinte ausdrückte, nur die Grösse dieser Bewegung zu haben, den Ausdruck mit entgegengesetzten Zeichen nähme, so gäbe er, von der Bewegung der Masse m abgezogen, eben das, was der Ausdruck (150) zu dieser Bewegung, addirt, gäbe. Nun wäre also der Unterschied der Bewegungen nach dem Stosse so groß, als die Summe vor dem Stosse. Für 147; IIII.

152. Zus. Also bleibt nur in 147; II; einerley Summe der Bewegungen, also überhaupt einerley Bewegung, vor und nach dem Stosse (150). Und weil von zwo bejahten Grössen, der bejahte Unterschied allemahl kleiner ist als die Summe, so ist nach dem Stosse weniger Bewegung, als vor dem Stosse in 147; III; (148) aber mehr in 147; IIII; (151).

153. Zus. Wenn man also die Grösse der Bewegung wie (103) schätzet, so ist es falsch, was des Cartes Princ. P. II. art. 40 seq. lehrt, daß in der Welt immer einerley Grösse der Bewegung erhalten würden, und nur was ein Körper an Bewegung verlöhre, in den andern überginge, worüber schon der P. Daniel in s. itin. per mund. Cartes. Erinnerungen gemacht hat. Ueberhaupt ist des Cartes in Bestimmung der Regeln der Bewegung a. a. O. nicht glücklich gewesen, und eben so unglück-

lich sind seine Nachfolger im Beweise derselben gewesen, davon man in Lipstorpii Speciminibus philos. Cartes. P. II. Proben findet.

154. Erkl. Zweene Körper beschreiben in gleichen Zeiten die Räume V; v; welches also auch die Verhältniß ihrer Geschwindigkeiten gibt, daß man sagen kann, die Geschwindigkeiten selbst verhalten sich wie V:v; Der Körper Entfernung sey anfangs $=a$.

I. Wenn sie nach entgegengesetzten Gegenden gegeneinander gehen, so ist ihre Entfernung nach Ablauf einer gewissen Zeit, $a-(V+v)$ das ist, sie sind einander um den Raum $V+v$ näher gekommen, oder um eben so viel, als wenn einer geruht, und der andere sich ihm mit der Geschwindigkeit $V+v$ genähert hätte. Das heißt sie nähern sich mit der Summe der Geschwindigkeiten.

II. Gehen sie nach entgegengesetzten Gegenden von einander, so ist ihre Entfernung nach Ablauf der gegebenen Zeit, $a+(V+v)$ oder sie entfernen sich von einander mit der Summe der Geschwindigkeiten.

III. Folgt der schnellere mit der Geschwindigkeit V dem langsamern nach, so wird ihre Entfernung $a+v-V=a-(V-v)$ wo $V-v$ bejaht ist. Sie nähern sich also einander mit dem Unterschiede der Geschwindigkeiten.

IIII. Folgt der langsamere mit der Geschwindigkeit V dem schnellern, so wird ihre Entfernung $a+v-V$, wo $v-V$ bejaht ist. Sie entfernen

sich

sich da von einander mit dem Unrerschiede der Geschwindigkeiten.

155. Zus. Man setze, der bisher betrachteten elastischen Körper M, m, Geschwindigkeiten nach dem Stosse, heissen V, v, so

I) näherten sie sich in 147. I; einander vor dem Stosse mit C+c (154; I.); und entfernen sich von einander nach dem Stosse mit V+v (154; II.) = C+c; (147; I.).

II) In 147; II; näherten sie sich einander vor dem Stosse mit C−c (154; III.), und nach dem Stosse ist v grösser als V (145), und sie entfernen sich von einander mit v−V (154; IIII;) =C−c (147; II.).

III) In 147; III; näherten sie sich vor dem Stosse, mit C+c (154; I.), und weil v > V (145), so entfernen sie sich nach dem Stosse mit v−V (154; IIII.)=C+c (147; III.).

IIII) In 147; IIII; näherten sie sich vor dem Stosse mit C−c (154; III.), und entfernen sich nach dem Stosse mit V+v (154; II.) = C−c (154; III.).

Die Körper entfernen sich also nach dem Stosse mit der Geschwindigkeit von einander, mit der sie sich einander vor dem Stosse näherten. Man drückt dieses auch so aus: Es werde bey ihnen einerley celeritas respectiua erhalten.

156. Zus. In gleichen Zeiten vor und nach dem Stosse; z. E. eine Minute vor, und eine Minute

nach dem Stosse, haben sie gleiche Entfernungen; denn wenn die Geschwindigkeit, mit der sie sich vor dem Stosse näherten, die ich Z nennen will, ihre Entfernung in einer gewissen Zeit von a bis auf o verminderte, so wird nach dem Stosse, eben diese Geschwindigkeit, mit der sie sich entfernen, ihre Entfernung von o bis auf a bringen. Man begreift, daß hier die Zeit, welche der Stoß etwa dauert, nicht in Betrachtung gezogen wird. Nähme man sie für merklich an, so müßte man die Zeit vor dem Stosse, bis zu seinem Anfange, und die Zeit nach ihm von seinem Ende an rechnen.

Von der Bewegung des Schwerpuncts.

157. Aufg. Die Massen M, m, bewegen sich mit den Geschwindigkeiten C, c, in der geraden Linie AB, 39. F. gegen einander. Man sucht die Bewegung ihres Schwerpunctes (dieses Wort in der 97. erklärten Bedeutung genommen).

Aufl. I. Wenn die Massen in A, B, sind, sey er in K; und in L, wenn sie durch die Wege AD; BE, in D; E, in der Zeit T, gekommen sind. Man nehme in der Linie AB; einen Punct Q, nach Gefallen, so ist $QK = \frac{QA.M + QB.m}{M+m}$ (Stat. 45.)

$= QA + \frac{AB.m}{M+m}$ wenn man $QA + AB$ statt QB setzt. Oder

II)

II. Die Entfernung des Schwerpunctes, von dem unveränderlichen Puncte Q, besteht aus zween Theilen; der Entfernung der Masse M von Q; und dem Producte aus $\frac{m}{M+m}$ in der Massen Entfernung.

III. Also ist $QL = QD + \frac{DE.m}{M+m}$.

IIII. Folglich $QL - QK$ oder $KL = AD - \frac{(AB-DE).m}{M+m}$.

V. Es ist aber $AD = C.T$ und $BE = c.T$, folglich $AB = DE + (C+c).T$, daher (IIII) $C.T + \frac{(C+c).T.m}{M+m}$ oder $KL = \frac{MC-mc}{M+m}.T$

VI. Der Schwerpunct entfernt sich also von Q, mit der Geschwindigkeit $\frac{MC-mc}{M+m}$; Kömmt der Werth dieser Geschwindigkeit verneint heraus, so nähert er sich Q mit dieser Geschwindigkeit (136).

VII. Ist $MC-mc=o$, so ruht er bey der Bewegung der Körper, sonst nie.

VIII. Ginge m nicht nach Q zu, sondern nach der entgegengesetzten Seite, so müßte man seine Geschwindigkeit (wie in 136) als verneint ansehen, und eben so die Geschwindigkeit von M, wenn diese Masse nach Q zu ginge.

VIIII. Wenn sich also diese Körper aus den Stellen A, B, mit den Geschwindigkeiten W, w, von

einander entfernen (wie elastische Körper, die nach dem Stosse nach verschiedenen Seiten gehen,) so darf man nur $-W$, $-w$, statt C, c, setzen, und der Schwerpunct entfernt sich von Q mit der Geschwindigkeit $\frac{mw-MW}{M+m}$ (VI). Die Geschwindigkeit W ist nach Q zu, die w von Q abwärts gerichtet; hat ein Körper eine andere Richtung, so nimmt man seine Geschwindigkeit verneint.

X. W bedeutet hier die Geschwindigkeit mit der M nach Q zugeht. In 134; V; ward die Geschwindigkeit gefunden, mit welcher M nach dem Stosse, nach AB ginge, also sich von Q entfernte. Wenn diese Geschwindigkeit verneint ward, so bedeutete sie, daß M nach Q zu ginge, wie hier W; wenn sie aber verneint ward, so ward ihr dortiger Ausdruck mit entgegengesetzten Zeichen bejaht, dieser muß also hier für W angenommen werden. Für w gilt der Ausdruck der Geschwindigkeit 134; VII. wie er dort steht, wenn man nur in VIII. statt w, W, ihre jetzt angegebenen Werthe setzt, so kömmt $mw - MW = MC - mc$.

XI. Also bewegt sich der Schwerpunct nach dem Stosse nach eben der Richtung, und mit eben der Geschwindigkeit, wie vor dem Stosse, daher er in der Voraussetzung VII; vor und nach dem Stosse ruhte, dieserwegen sagt man: **der Zustand des Schwerpunctes wird durch den Stoß nicht geändert.**

XII. Er behält also auch vor und nach dem Stosse einerley Grösse der Bewegung, wenn man sich in ihm die Massen vereinigt vorstellt, auf welche Art einige Cartesianer den Satz ihres Lehrers (153) zu vertheidigen gesucht haben. Diese beständige Grösse der Bewegung; heißt Joh. Bernoulli Grösse der Richtung (quantité de direction). Disc. sur le mouvement ch. 4. art. 8. Op. T. III.

XIII. Nach dem Verfahren in I.... VI. läßt sich darthun, daß der gemeinschaftliche Schwerpunct so vieler Körper als man will, ruhe, oder sich gleichförmig in einer gegebenen geraden Linie bewege, wenn diese Körper sich gleichförmig in gegebenen geraden Linien bewegen. Man darf zu dieser Absicht nur jedes Körpers Bewegung in zwo zerlegen, da allemahl die eine einer gegebenen Linie, die andere einer andern parallel ist. Dieses hat König in der (97) angeführten Abhandlung Theor. III. bewerkstelliget, und Theor. IIII. gewiesen, daß, wenn so viel Körper, als man will, auf was für Art man will, durch Anziehen, Stossen, u. s. w. in einander wirken, der Zustand des Schwerpunctes dadurch nicht verändert werde. Newton Princ. Leg. mot. 3. cor. 4. hat dieses gelehrt, aber auf keine überzeugende Art dargethan. Man s. hievon auch d'Alembert, dynamique art. 64.

Noch einige Sätze von den Veränderungen der Geschwindigkeit.

158. Die Geschwindigkeit des Körpers M nach dem Stosse (134; V.), ziehe man von seiner Ge-

schwindigkeit vor dem Stosse ab, der Rest ist $\frac{2m.(C+c)}{M+m}$. So viel Geschwindigkeit hat er verlohren. Hätte m geruht, so betrüge dieser Verlust $\frac{2mC}{M+m}$; Beyde verhalten sich also wie die Summe der Geschwindigkeiten zu der Geschwindigkeit des Körpers M.

159. Die Geschwindigkeit in 135; I; ist von der in 134; V; nur darinn unterschieden, daß c das entgegengesetzte Zeichen hat. Also verliehrt M in 135; I; die Geschwindigkeit $\frac{2m.(C-c)}{M+m}$; und dieser Verlust verhält sich zu den, welchen es litte, wenn m ruhte, wie der Unterschied der Geschwindigkeiten zur Geschwindigkeit des Körpers M.

160. Wenn m vor dem Stosse ruht, so bekömmt es nach dem Stosse die Geschwindigkeit $\frac{2M}{M+m}$. C (135; II). Ist M grösser als m; so ist der in C multiplicirte Factor, grösser als 1; aber kleiner als 2; Eine grössere Masse, gibt also einer kleinen ruhenden mehr Geschwindigkeit, als sie selbst vor dem Stosse besaß, aber nicht noch einmahl soviel.

161. Wenn m vor dem Stosse ruhte, so hat die zuvor schon bewegte Masse nach dem Stosse die Geschwindigkeit $\frac{M-m}{M+m}$. C (135; I.). Dazu C addirt, giebt die Geschwindigkeit der zuvor ruhenden

Masse

Masse nach dem Stosse; Also ist der vor dem Stosse ruhenden Masse Geschwindigkeit nach dem Stosse; die Summe, von den beyden Geschwindigkeiten der an sie stossenden Masse, vor und nach dem Stosse.

162. Der Masse M Geschwindigkeit vor dem Stosse, verhält sich zur Geschwindigkeit der Masse m nach dem Stosse $= M+m:2M$ (160) und zu der Geschwindigkeit, welche M selbst verliert (158) $= M+m:2m$, und zu ihrer eigenen Geschwindigkeit vor dem Stosse, wie $M-m:M+m$. Diese drey Verhältnisse sind also; wie die Summe der Massen, zur doppelten vorhin bewegten. Wie die Summe der Massen zur doppelten vorhin ruhenden, und wie die Summe der Massen zum Unterschiede. Diese Sätze 161; 162 gelten, die vor dem Stosse bewegte Masse, mag grösser oder kleiner seyn, als die ruhende.

163. Wenn m vor dem Stosse ruht, und grösser als M ist, so ist des letztern Geschwindigkeit nach dem Stosse (161) verneint, eine kleinere Masse also, die an eine grössere ruhende stößt, wird allemahl reflectirt; der in C multiplicirte Factor aber (160) ist < 1; also bekömmt die grössere Masse nicht so viel Geschwindigkeit, als die kleinere Masse, von der es in Bewegung gesetzt ward, vor dem Stosse besaß.

Die Summen der beyden Producte aus jeder Geschwindigkeit Quadrate in ihre Masse, sind vor und nach dem Stosse, einander gleich.

164. Die Quadrate der beyden Geschwindigkeiten 134; V; VII; sind ein paar Brüche, deren ge-

meinschaftlicher Nenner $(M+m)^2$ ist. Die Zähler sind

$(M-m)^2.C^2-2.(M-m).mCc+4m^2c^2$ und
$(M-m)^2.c^2+2.(M-m).MCc+4M^2C^2$

Wenn man den ersten Zähler mit M, den zweyten mit m multiplicirt, und beyde Producte addirt, so ist ihre Summe $(M-m)^2.(MC^2+mc^2)+4Mm.(mc^2+MC^2)=(M+m)^2.(MC^2+mc^2)$; diese Summe mit dem gemeinschaftlichen Nenner darunter, gibt die Summe der beyden Producte aus jeder Geschwindigkeit nach dem Stosse ihrem Quadrate in ihre Masse; diese Summe ist also $=MC^2+mc^2$, so groß als die Summe der beyden Producte, aus dem Quadrate jeder Geschwindigkeit, vor dem Stosse in ihre Masse.

Weil von den hier gebrauchten Geschwindigkeiten, die in (135) nur dadurch unterschieden sind, daß in ihnen c das entgegengesetzte Zeichen hat, so ist auch für sie gegenwärtiger Satz wahr, weil das Quadrat von c einerley bleibt, was auch c für ein Zeichen hat.

Wie vorhergehende Sätze durch Versuche können gewiesen werden.

165. Wenn Versuche mit den bisherigen Lehren verglichen werden sollen, so muß man Körper mit gegebenen Geschwindigkeiten an einander können stossen lassen, und auch die Geschwindigkeiten, welche sie nach dem Stosse haben, zu messen im Stande seyn. Ein zuverläßiges Mittel, einem Körper

eine

eine gewisse bestimmte Geschwindigkeit zu geben, ist, wenn man ihn von der Höhe herabfallen läßt, welche dieser Geschwindigkeit zugehört (I. Absch. 43). Der Wiederstand der Luft wird nicht so gar beträchtlich seyn, wenn man dichte Massen von nicht allzugrossen Höhen fallen lässt. Weil uun die Geschwindigkeit bey einerley Höhe einerley ist, durch was für einen Weg auch der Körper gefallen ist (II. Abschn. 20), so wird sich dieses auf verschiedene Arten erhalten lassen. Folgende möchte eine der besten seyn: Man stelle sich an O 21 F. einen Faden vor, an dessen Ende A eine Kugel hängt: Wenn man den Faden mit der Kugel in die Lage OE erhebt, so wird die Kugel in A mit der Geschwindigkeit anlangen, die der Höhe AG zugehört. Gegentheils, wenn sie, vermittelst eines in A erhaltenen Stosses, bis in E steigt, so hat sie in A die Geschwindigkeit gehabt, welche der Höhe AG zugehörte (I. Absch. 45).

Man hänge also ein Paar Kugeln P, Q, 40. F. an Fäden von M, N, so, daß in dieser verticalen Lage der Fäden der Kugeln Berührungspunct mit ihren beyden Mittelpuncten in einer wagrechten Linie liegt. Wenn man nun jede Kugel in der Verticalfläche durch MN erhebt, so daß jeder ihr Faden so stark gespannt bleibt, als in der verticalen Lage, oder daß jede wie ein Pendel gehen muß, so stossen sie zu unterst gerade an einander. Man kann jeder Kugel vermittelst der Höhe, durch die man sie fallen läßt, eine willkührliche Geschwindigkeit geben, und also kann man die Höhen so nehmen, daß die Geschwindigkeiten gegebene Verhältnisse haben. Wie groß

die

die Geschwindigkeit ist, welche jede Kugel nach dem Stosse hat, läßt sich aus der Höhe wahrnehmen, auf welche sie nach dem Stosse wieder steigt. Man wird leicht ausdenken können, wie Maschinen zu diesen Versuchen einzurichten wären. Mariotte hat dergleichen schon gebraucht; de la percussion des corps, (Oeuvr. de Mr. Mariotte Haag 1740 T. I.) und Nollet Mariottes Maschine bequemer gemacht Leçons de Phys. T. I. 4. Leç. 3. Sect.

Von der Mittheilung der Geschwindigkeit vermittelst mehrer Körper.

166. Aufg. A, B, C, sind drey Massen, von denen die letzten beyden ruhen. Die erste stößt an die zweyte mit der Geschwindigkeit a an, und die zweyte mit der hiedurch erlangten Geschwindigkeit an die dritte. Man sucht der letzten Geschwindigkeit.

Aufl. Für die erste und zweyte Masse ist

in 135; II.	M	m	C	c
hier	A	B	a	o

also der zweyten Masse Geschwindigkeit $= \frac{2A}{A+B}$.

Auf eben die Art der dritten Masse Geschwindigkeit $\frac{2B}{B+C} \cdot \frac{2Aa}{A+B} = \frac{4ABa}{AB+AC+BC+B^2}$.

Hätte die erste Masse unmittelbar an die dritte gestossen, wenn nähmlich B nicht da gewesen wäre, so wäre die Geschwindigkeit der dritten $\frac{2Aa}{A+C}$ gewesen.

Diese

Diese unmittelbar erhaltene Geschwindigkeit, von jener mittelbar erhaltenen abgezogen, läßt $\left(\frac{2B}{AB+AC+BC+B^2} - \frac{B}{A+C}\right) \cdot 2Aa$; Wenn man die beyden Brüche, deren Unterschied den ersten Factor ausmacht, auf einerley Benennung bringt, so wird der Unterschied der Zähler $(A-B)$. $(B-C)$; dieses ist bejaht, wenn A, B, C, nacheinander kleiner, oder auch, wenn sie nacheinander grösser werden, so daß die Grösse von B, zwischen die Grössen von A und C fällt, im ersten Falle nähmlich sind beyde Factoren dieses Unterschiedes bejaht, im zweyten sind beyde verneint. Also läßt die unmittelbare Geschwindigkeit von der mittelbaren abgezogen, allemahl was bejahtes; das ist: Wenn zwischen zween elastische Körper ein dritter gelegt wird, der grösser als einer von den beyden äussersten, und kleiner als der andere ist; und wenn man einen von den äussersten, an diesen mittlern ruhenden, mit einer willkührlichen Geschwindigkeit anschiebt, so wird von diesem mittlern, dem andern äussersten, der auch geruhet hatte, mehr Geschwindigkeit mitgetheilt, als derselbe erhalten hätte, wenn der mittlere nicht da gewesen wäre, und der erste äusserste mit seiner Geschwindigkeit unmittelbar an den letzten gestossen hätte.

167. Aufg. Wenn A, a, C, gegeben sind, zu finden wie groß B seyn muß, damit die von ihm an C mitgetheilte Geschwindigkeit die größte mögliche wird.

Aufl. Diese Geschwindigkeit ist $= \frac{4Aa}{A + \frac{AC}{B} + C + B}$

Wenn man nähmlich in ihrem vorigen Ausdrucke Zähler und Nenner mit B dividirt. Im gegenwärtigen nun, ist nur der Nenner veränderlich, und man übersieht also gleich, daß diese Geschwindigkeit am größten wird, wenn der Nenner gegenwärtigen Ausdrucks am kleinsten wird. Dieses geschieht nun vermöge der Methode der größten und kleinsten, wo sein Differential verschwindet, also $\frac{A.C.-dB}{B^2} + dB = o$ oder $B^2 = A.C$, das ist, wenn der mittlere Körper die mittlere geometrische Proportionalgrösse zwischen den beyden äusern hat.

168. Aufg. Eine Reihe Körper A B C . . . O (41. F.) deren Massen in einer geometrischen Progression fortgehen, liegen ruhig. Man giebt dem ersten die Geschwindigkeit a; mit welcher er an den zweyten stößt, dieser giebt vermittelst der erlangten Geschwindigkeit dem dritten eine gewisse Geschwindigkeit, und so der dritte dem vierten, u. s. w. Man sucht des letztern Geschwindigkeit.

Aufl. Der Exponent der Verhältniß sey n, so daß der zweyte Körper $B = nA$, der dritte $C = n^2 A$, und so der rte $K = n^{r-1} A$; der $(r+1)$te; $L = n^r A$. Des rten Geschwindigkeit sey u; so ist die Geschwindigkeit des nächstfolgenden $\frac{2Ku}{K+L}$ (wie in

166) $= \frac{2u}{1+n}$. Man nehme an u sey $= \left(\frac{2}{1+n}\right)^{r-1}$ a;
oder die Geschwindigkeit eines gewissen besondern Körpers in dieser Reihe, sey a mit der Potenz von $\frac{2}{1+n}$ multiplicirt, deren Exponent um eins kleiner ist, als die Zahl des Körpers. Wenn dieses angenommen wird, so ist des nächstfolgenden Körpers Geschwindigkeit $\left(\frac{2}{1+n}\right)^{r}$. a oder sie ist auch ein Product aus a in eine Potenz von $\frac{1}{1+n}$, deren Exponent um eins kleiner ist, als die Zahl des Körpers. Gilt also das angenommene Gesetz für einen Körper, so gilt es für alle folgende. Nun ist aber des zweyten Körpers Geschwindigkeit $= \frac{2Aa}{A+B} = \frac{2}{1+n}$. a, und für ihn $r = 1$; Also gilt für ihn dieses Gesetz, so wie es $r = 1$ gesetzt, für den ersten gilt. Also ist es für alle wahr; und die Geschwindigkeit des $(r+1)$ten Körpers ist $\left(\frac{2}{1+n}\right)^{r}$. a.

Exempel. Wenn die Körper in der Reihe 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; ... abnehmen, oder $n = \frac{1}{2}$, so ist diese Geschwindigkeit $(\frac{4}{3})^{r}$ a; also wenn 100 Körper wären, oder $r + 1 = 100$; des hundersten Geschwindigkeit $(\frac{4}{3})^{99}$. a. Man findet dieß durch die Logarithmen wenigstens einigermassen so:

log

$\log 4 = 0,6020600$
$\log 3 = 0,4771212$

$\log \frac{4}{3} = 0,1249388$ abgezogen von
$100 \log \frac{4}{3} = 12,49388$ läßt

$99 \log \frac{4}{3} = 12,36894$

Weil ein so grosser Logarithme nicht in den Tafeln steht, so suche man ihn um 8 vermindert in den Tafeln auf; so fällt er zwischen die Logarithmen von 23385 und von 23386; also die Zahl die dem gefundenen Logarithmen zugehört zwischen 23385000000000 und 23386000000000 oder die Geschwindigkeit des hundersten Körpers ist mehr als 2338500000000 mahl grösser als des ersten seine.

Stiesse der erste Körper unmittelbar an den letzten an, so wäre des letzten dadurch erhaltene Geschwindigkeit $= \frac{2Aa}{A+(\frac{1}{2})^{99}.A} = \frac{2^{100}}{2^{99}+1}.1$, welches offenbahr nur ein wenig grösser ist als 1 ist, wie nach 160 auch seyn muß; woraus man sieht, wie sehr die Geschwindigkeit durch Dazwischensetzung vieler Körper verstärkt wird, bey jeden nähmlich was weniges, aber das oft wiederhohlt.

169. Die Wahrheiten von 132...168, machen Hungens Buch de motu corporum ex percussione in s. Op. posthum. aus; wo sie aber auf andern Gründen beruhen, und synthetisch ausgeführt sind. Hungens und Wrenn haben, jeder für sich, im vorigen Jahrhunderte die Gesetze des Stosses fast zu

einer

einer Zeit entdeckt. Man hat sie nachgehends auf unterschiedliche Arten darzuthun gesucht. Ich habe die gegenwärtige, wie ich bey eignem Nachdenken darauf gekommen bin, erwählt, weil ich glaube, daß sich, wie in 132..135. verfahren worden, die Richtigkeit dessen, was man annimmt, am deutlichsten übersehen läßt, welches ich nicht von jeder Abhandlung dieser Lehren sagen kann.

170. Das Exempel (168) macht den Schluß von Hungens Buche. Er giebt aber daselbst eine andere Zahl an, weil er sich vielleicht verrechnet hat. Die wahre hat Joh. Bernoulli gegeben disc. sur le mouv. chap. 4. art. 15.

171. Wenn die Bewegung in diesem Exempel vom kleinsten anfinge, also $B = 2A$. $C = 2B$ u. s. w. wäre, so wäre $n = 2$; und des $(r+1)$ten Geschwindigkeit $(\frac{2}{3})^r a$, kleiner als a wie gehörig (163) also die Grösse seiner Bewegung $(\frac{2}{3})^r . a . 2^r . A = (\frac{4}{3})^r . Aa$. Hungen redet a. a. O. davon, wie in diesem Falle die Grösse der Bewegung vermehrt werde, welches sich aus gegenwärtiger Betrachtung wird herleiten lassen. Weil er sich aber nicht deutlich erklärt, und seine angegebene Zahl sowohl als die andere falsch seyn könnte, so überlasse ich diese Untersuchung nach der gegebenen Anleitung anzustellen, jemanden, der sich daran üben will, da an der Sache selbst übrigens nichts gelegen ist.

Vom

Vom schiefen Stosse.

172. Den schiefen Stoß zu untersuchen, darf man nur den bisherigen Betrachtungen die Zerlegung der Bewegung beyfügen.

Gesetzt, zwo Kugeln deren Mittelpuncte A, B, sind, 42. F. stossen so an einander, daß vor dem Stosse, ihre Geschwindigkeiten und Richtungen AD; BF; sind. Weil im Stosse, die Mittelpuncte mit dem Berührungspuncte in einer geraden Linie AB liegen, so zerlege man die Geschwindigkeit AD in die beyden Theile AE, DE, deren der erste nach AB gerichtet, der andere darauf senkrecht ist; Eben so werde BF; in BG, FG, zerlegt. Man sehe also die beyden Körper an, als stiessen sie mit den Geschwindigkeiten AE=C; BC=c; gegen einander, (fiele G nach eben der Seite von A, nach welcher E fällt, so folgte A dem B nach,) und suche daraus jedes Geschwindigkeit nach dem Stosse (134; 135;). Was hieraus für A folgt, werde durch AH ausgedrückt. Man ziehe AL der ED parallel und gleich, so hat A die beyden Geschwindigkeiten AH, AL; aus denen die mittlere AI entspringt, oder AI wird den Weg und die Geschwindigkeit von A nach dem Stosse anzeigen. Eben so verfährt man für B.

Ich betrachte hier blos die Geschwindigkeiten der Mittelpuncte. Es ist offenbahr, daß die Körper durch einen solchen Stoß noch Bewegungen um Axen bekommen, und sich wälzen werden, welche Untersuchung ich hier wie in (99) beyseite setze.

Vom

Vom Stosse an Hindernisse, die nicht weichen.

173. Lehrs. Wenn ein elastischer Körper nach der Richtung DE 43. F. senkrecht auf eines elastischen unbeweglichen Körpers Ebene stößt, so springt er mit der Geschwindigkeit zurück, mit der er angestossen hat.

Bew. Wäre keine Federkraft da gewesen, so hätte der Körper beym Anstosse seine Bewegung völlig verlohren, und wäre in E liegen geblieben; Er hätte nähmlich das gethan, was nöthig war, seine Bewegung dem unbeweglichen völlig mitzutheilen, obgleich daraus in diesem keine wirkliche Bewegung erfolgt, eben wie wenn ich mit meiner völligen Gewalt an eine Mauer drücke, von mir alles geschieht, was mir möglich ist, eine Bewegung hervorzubringen, obgleich keine sichtbare erfolgt. Weil nun vermittelst der Federkraft die Veränderung wieder hergestellt wird, die er gelitten hat, so erhellt wie in 134; III; daß er die vorige Bewegung, und also die vorige Geschwindigkeit rückwärts bekommt.

Eben den Schluß bringt man heraus, wenn in 135; I; $c=o$ und $m=\infty$ gesetzt wird, denn da wird des Körpers M Geschwindigkeit nach dem Stosse $-C+c=-C$. Eine Masse aber die nicht weicht, kann als unendlich angesehen werden, weil jede endliche ruhende Masse durch den Stoß eine gewisse Geschwindigkeit bekäme; und die Masse also, welche nicht weicht, selbst unendlich seyn, oder mit einer verbunden seyn muß, die man als unend-

lich ansehen kann, wie wenn eine Marmortafel auf dem Erdboden läge; da sie keinem Stosse ausweichen wird, der nicht stark genug ist die Erde zu verrücken.

174. Aufg. Der elastische Körper stößt an eine unbewegliche elastische Hinderniß nach DH an, welche mit der Ebene, an die er stößt, den schiefen Winkel DHA macht: Man sucht hier, wie er zurückprallen wird.

Auflö. Man zerlege die Bewegung, die er nach DH hat, in zweene Theile, einen der auf die Ebene senkrecht, den andern der mit ihr parallel geht, sie sind DE und EH; dem Theile DE wiederfährt was in 173. ist gewiesen worden, EH aber wird auf keine Art verändert, weil ihm die Ebene nicht im Wege ist. Also wird sich die Bewegung des Körpers nach dem Stosse, auch aus zween Theilen zusammen setzen lassen, einem, welcher der Ebene parallel, und des ähnlichen Theiles der vorigen Bewegung Verlängerung ist, HG = EH; und einem, der auf sie senkrecht steht GF = ED; diese zusammengesetzte Bewegung ist also HF. Sie liegt mit DH in der Ebene durch DE, FG, welche auf die zurückwerfende Ebene senkrecht steht, und es ist FHG = DHE; der Körper prallt also in einer Ebene, welche durch die Linie nach der er auffiel, auf die zurückwerfende Ebene senkrecht steht, und solche in AB schneidet, unter eben dem Winkel zurück, unter dem er aufgefallen ist, und beschreibt HF mit eben der Geschwindigkeit, mit der er DH beschrieben

hatte,

hatte, dergleichen thut auch das Licht (Katoptr. 11; 12).

175. Zus. Wenn der Körper mit der Bewegung M. C nach DH anstößt, so ist sein Stoß auf die Ebene nur so stark, als ob er senkrecht auf die Ebene AB; mit der Bewegung $\frac{DE}{DH}$. M. C = sin DHE.

M. C anstiesse. Oder der schiefe Stoß, verhält sich zum senkrechten, der mit eben der Grösse der Bewegung geschähe, wie der Sinus des Einfallswinkels zum Sinus totus.

176. Aufg. D, F, sind gegebene Puncte. Ein Körper soll aus D an eine gegebene Ebene, und von solcher durch F, zurückgehn. Man fragt, wie er gehen muß, wenn sein Weg, der aus beyden Theilen von D an die Ebene, und von ihr wieder an F zurück, besteht, der kürzeste unter allen möglichen seyn soll.

Aufl. I. Man lasse von D, F; auf die Ebene Perpendikel, DE, FG, durch die Puncte E, G, wo sie die Ebene schneiden, ziehe man die gerade Linie AB. Ich behaupte zum ersten, daß die Stelle, wo der Körper an die Ebene treffen muß, irgendwo in AB sey. Man wird sich davon leicht überzeugen, wenn man sich irgend einen Ort der Ebene vorstellt, welcher auser AB liegt; I mag einen solchen Ort bedeuten, und der Weg des Körpers müßte alsdenn aus ein paar geraden Linien DI und IF bestehen, die ich, die Figur nicht zu verwirren, so wie einige folgende, der Einbildungskraft

zu ersetzen überlasse. Weil die Ebene, von der jetzt die Rede ist, und in der sich I befindet, auf der Ebene durch AB, DE, FG, senkrecht steht (Geom. 47. S.), so wird ein Perpendikel von I auf die Ebene DEGF gefällt, in der Ebene ABI liegen (G. 47. S. 2. Z.), folglich AB irgendwo, in L, schneiden. Wenn man sich nun DL; LF, gezogen einbildet, so sind die Dreyecke DLI, FLI, bey L rechtwinklicht, folglich DI > DL; FI > FL; und der Weg DL + LF < DI + IF; Ein Weg, wie der letztere, kann also nie der kürzeste seyn, weil sich auf die erwähnte Art, allemahl ein kürzerer angeben läßt. Dieses deutlich zu zeigen, hat mir nöthig geschienen, da es von den gewöhnlichen Schriftstellern bey gegenwärtiger Abhandlung übergangen wird, weil sie nähmlich gleich statt einer ganzen Ebene nur die Linie AB betrachten. Dieses ist eine Unvollständigkeit von der Art, wie wenn in der Statik statt der schiefen Fläche, oder in der Katoptrik statt des ebenen Spiegels, nur gerade Linien betrachtet werden. Wer es nicht zu rechtfertigen weiß, warum man unter solchen Umständen nur eine gerade Linie betrachtet, der kann nicht sagen, daß er die Untersuchung mit gehöriger Gründlichkeit angestellt habe, er verräth sich vielmehr, daß er die Sache nie in der Natur selbst betrachtet, sondern nur ein Bild davon das er in einem Compendio gefunden, angesehen, und vielleicht dieses Bild wieder in ein Compendium, das er selbst abgeschrieben hat, nachgezeichnet habe.

II. Es sey also DH+HF der Weg des Punctes, wo H in der Linie AB liegt. Man nenne DE=b, FG=c, EG=2e und es sey EH = e - x so ist GH=e+x und DH=$\sqrt{}$ (bb+(e-x)²), HF= $\sqrt{}$(bb+(e+x)²). Wenn man also dDH+dHF =o setzt, so wird DH+HF ein Gröstes oder ein Kleinstes (An. Un. 161). Kein Gröstes aber kann es nicht werden, denn man kann H ohne Ende in der Linie AB hinausrücken lassen, da klar ist, daß jede der Linien DH, HF, ohne Ende wachsen kann. Fiele solchergestalt H nicht zwischen E und G, sondern linker Hand von E, so bekäme e-x oder EH einen verneinten Werth, weil es auf die Seite fiele, welche der, wo es in der Figur hinfällt, entgegengesetzt ist. Auch diese Betrachtung wird insgemein nicht angestellt, sondern angenommen, die Rechnung werde ein Kleinstes geben, ohne darzuthun, daß sie kein Gröstes gebe.

III. Die beyden Differentiale nun sind zusammen $-\frac{(e-x)dx}{\sqrt{}(bb+(e-x)^2)}+\frac{(e+x)dx}{\sqrt{}(cc+(e-x)^2)}=o$ nach jetziger Voraussetzung. Daraus findet sich, die Grössen auf verschiedene Seiten gebracht, mit dx dividirt, mit beyden Nennern multiplicirt, und quadrirt, $bb.(e+x)^2+[(e+x).(e-x)]^2=cc.(e-x)^2+[(e+x).(e-x)]^2$ also $b.(e+x)=c.(e-x)$ und $(b+c)x=(c-b).e$ also $x=\frac{e.(c-b)}{b+c}$

Dieses giebt e-x oder $EH=\frac{2be}{b+c}$ und e+x oder

$GH = \frac{2ce}{b+c}$ also $\frac{EH}{b} = \frac{GH}{c}$ oder DHE = FHG.

Der kürzeste Weg ist also der, welcher bey der Reflexion (174) beschrieben wird.

IIII. Der kürzeste Weg selbst ist $r(bb + \frac{4bbcc}{r(b+c)^2}) + r(cc + \frac{4eecc}{r(b+c)^2}) = r[(b+c)^2 + 4e^2]$.

V. Für b = c ist x = o und der kürzeste Weg $2r(bb+ee)$.

Betrachtungen über die Vergleichung des Stosses mit dem Drucke.

177. Es giebt Schriftsteller, welche den Stoß mit dem Drucke durch ihre Wirkungen haben vergleichen wollen. Camus, Traité des forces mouvantes P. I. ch. 3. Pr. 5. verfährt folgendergestalt: Man lege auf einen Ambos eine bleyerne Kugel, und schlage mit einem Hammer, der ein Pfund schwer ist, ohne Gewalt (sans violence) darauf; sie wird dadurch platt werden: Eine gleiche Kugel, eben so platt zu drücken, wird man ein Gewicht von zweyhundert Pfund darauf legen müssen. Pr. 4. beschreibt er, wie dieses Gewicht anzubringen ist: Er schließt also, der Schlag des Hammers sey einem Gewichte von 200 Pfunden gleichgültig.

178. Man sieht leicht, wieviel Unbestimmtes in diesem Verfahren ist. Ohne Gewalt ist nichts gesagt,

gesagt, denn Gewalt muß allemahl beym Schlage seyn; Camus hat nur gemeint: ohne grosse Gewalt; und da kann man nicht sagen, wie viel Gewalt er eigentlich verlangt. Man kann an diese Schriftsteller sehen, wie nachtheilig bey so viel praktischer Geschicklichkeit als er zeigt, der Mangel ganz leichter und gemeiner theoretischer Einsichten ist. Hätte er sich darauf besonnen, daß ein Körper durch den Fall von einer gegebenen Höhe eine gegebene Geschwindigkeit erhält, so würde er sich hier sehr bestimmt haben ausdrücken können. Statt den Hammer mit der Hand zu führen, dürfte man nur sein Eisen von einer gegebenen Höhe herabfallen lassen: so liesse sich allemahl bestimmen, wie hoch er herabfallen müßte, um die Kugel so und so weit platt zu machen.

179. Auf eine ähnliche Art liesse sich der Stoß mit Gewichten vergleichen, wenn man in eine Wagschale ein Gewicht legte, und sähe wie hoch ein kleineres herabfallen müßte, jenes zu erheben. Dieses Verfahren würde bequemer und zuverlässiger als jenes seyn, weil die verschiedene Festigkeit der Materien und andere Umstände, die bey jenen Unrichtigkeiten machen können, keinen Einfluß haben, und blos die Friction des Wagbalkens hier Ungewißheiten machen könnte.

Da die größte Masse von der kleinsten kann in Bewegung gesetzt werden (113), so würde man in 179; die Berechnung im voraus so anstellen können: Wenn die kleine Masse a von der Höhe u,

also mit der Geschwindigkeit γu (I. Abschn. 43.) auf die Wagschale fiele, so gäbe sie (die Federkraft beyseit gesetzt) der grössern M; die Geschwindigkeit $\frac{m\gamma u}{M+m}$ aufwärts (115). Das Quadrat dieses Ausdrucks ist die Höhe k (I. Abschn. 45) auf die er in $0,008.\frac{m\gamma u}{M+m}$ Secunden steigt, weil nähmlich in der dortigen Rechnung hier $x=k$ gesetzt wird. Hiebey muß man sich vorstellen, die Masse m werde gleich nach dem Stosse weggenommen, sonst würde sie, indem sie zu sinken fortfährt, ferner in die Bewegung der Masse M einen Einfluß haben. Solchergestalt lassen sich Stoß und Gewicht nicht so vergleichen, daß man nur sehen wollte, was für ein Stoß ein Gewicht erhöbe, sondern man muß bestimmen, was für eine Geschwindigkeit er dem Gewichte aufwärts giebt. Eben so hat man keinen Begriff in 177; wie viel der Schlag gethan habe, wenn man nur weiß, er habe die Kugel, so und so weit platt gemacht. Ein Schlag, der eben dieses in geringerer oder grösserer Zeit verrichtet hätte, wäre ohne Zweifel stärker oder schwächer gewesen.

180. Daß aus fortgesetzten Drückungen Bewegung entstehen kann, zeigt die Schwere. Ein Stein, der auf einem Tischblatte eine Secunde lang liegt, thut diese Secunde lang nichts weiter, als daß er es drückt. Man setze, das Tischblatt sey für sich nicht schwer; man ziehe die Füsse darunter plötzlich

weg,

weg, so wird der Stein mit dem Tischblatte fallen. Dauert der Fall eine Secunde lang, so hat der Stein ohne Zweifel diese Zeit über in das bewegte Tischblatt nicht anders gewirkt, als zuvor in das vorhergehende, denn daß die Füsse weggezogen wurden, konnte in seiner Wirkung nichts ändern. Aus fortgesetztem Drucke entstehet also Bewegung, wenn er nicht aufgehalten wird; welche Betrachtung schon im I. Abschn. 52. u. f. ausgeführt ist. Will man also lebendige und todte Kräfte (wie Stat. 1.), so unterscheiden, daß bey jenen Bewegung, bey diesen keine hervorgebracht wird, so muß man sich diese nur als einen einzigen Druck, der aufgehalten wird, vorstellen, denn weil durch die Hinderniß, dieser Druck aufgehalten wird, so ist klar, daß er bey fortdauernder Hinderniß, auch immer fortdauern kann, ohne Bewegung hervorzubringen. Was aber ein einzelner Druck, in einer unendlich kleinen Zeit hervorbrächte, wäre eine unendlich kleine Bewegung (wie im I. Abschn. 58), und daher wird sich das, womit endliche Bewegung verbunden ist, die sogenannte lebendige Kraft, als eine Summe unzähliger Drucke, als ein Integral ansehen lassen, davon ein Druck das Element wäre. Die Vorstellung, die ich im I. Abschn. a. a. O. von beschleunigenden Kräften und den Veränderungen der Geschwindigkeit, die sie verursachen, ausgeführt habe, wird dieses erläutern.

181. Man hat also mit Recht lebendige und todte Kraft in diesem Verstande als Dinge, die sich nicht vergleichen lassen, angesehen, da diese ein Ele-

ment

ment von jener ist. Der Ausdruck ist nicht so richtig, dessen sich einige bedient haben, daß die todte Kraft mit der lebendigen, wie eine Linie mit der Fläche zu vergleichen wäre, denn die Fläche ist nicht das Integral der Linie. So wenig aber sich auch auf diese Art todte Kraft mit lebendiger vergleichen läßt, so wenig läßt sich doch auch läugnen, daß diese von jener könne hergeleitet werden, wie nur ist gewiesen worden, so wie Gegentheils auch Druck aus Bewegung folgt (II. Abschn. 4).

182. Bey Körpern, die nicht vollkommen hart sind, dauert der Stoß eine Zeitlang (132), und man kann ihn als eine Reihe von Drückungen ansehen, die diese Zeit über geschehen. So lassen sich die gefundenen Formeln für die Bewegungen nach dem Stosse (110; 134), auch durch die Integralrechnung finden, wenn man sich vorstellt, in die Körper wirke eine gewisse Kraft, nach den Gesetzen beschleunigender Kräfte, wodurch sich jedes Geschwindigkeit, nach dem I. Abschn. 76. u. s. w. angegebenen Formeln, ändert. Es sey zwischen ein paar Körpern, deren Massen A; B; sind, eine Feder, deren ausdehnende Kraft = P gesetzt wird, oder die vermittelst ihrer ausdehnenden Kraft das Gewicht P tragen könnte. Wenn die Körper sich einander nähern und endlich zusammen kommen, wodurch die Feder zusammengedruckt wird, so wird ihre ausdehnende Kraft in jeden wirken, und daraus eben das erfolgen, was geschehen würde, wenn in den einen die beschleunigende Kraft $\frac{P}{A}$, in den

andern die beschleunigende Kraft $\frac{P}{B}$ wirkte, welches denn die Geschwindigkeit jedes Körpers vergrössern oder vermindern wird, nachdem eine solche Kraft seiner Richtung gemäß oder selbiger entgegen wirkt. Diese Veränderung der Geschwindigkeit geht vorerwähntermassen durch unendliche kleine Stufen, die Zeit über da der Stoß dauert. Sind die Körper nicht elastisch, so dauert der Stoß nur bis die Feder völlig zusammengedruckt ist; sie dehnt sich aber alsdenn nicht wieder aus einander, sie war nähmlich nur ein sinnliches Bild desjenigen, was in beyden Körpern die Bewegung nach und nach ändert. Sind die Körper elastisch, so setzt sich die Feder nach ihrer Zusammendrückung völlig wieder in ihrigen vorigen Zustand. Auf diese Art hat Herr Euler Comm. Petrop. T. V. p. 159. diese Untersuchung angestellt, und solches Mem. de l'Ac. de Pr. 1745; p. 50. wiederhohlt. An dem letztern Orte zeigt er noch umständlicher, wie man die Stärke des Stosses messen könne, wenn man ihn als eine Summe unzählicher Drückungen betrachtet. Es schickt sich hiezu der Eindruck, den ein stossender Körper in dem andern macht, welcher Eindruck bleibt, wenn die Körper nicht elastisch sind. Eben so läßt sich die Härte eines Körpers mit der Härte eines andern vergleichen, wenn man die Eindrücke, die beyde etwa von einerley Stosse litten, miteinander vergleicht. Man muß aber die Zeit dabey allemahl in Erwägung ziehen. Die Berechnungen,

welche

welche sich auf diese Begriffe gründen, hier beyzubringen, ist mir zu weitläuftig, da sie nur die schon bekannten Gesetze des Stosses geben, und ihnen zu einem praktischen Gebrauche, Stösse oder Härten mit einander zu vergleichen, meiner Einsicht nach noch sehr viel muß beygefügt werden. Ein Exempel dieser Anwendung findet sich in Eulers erläut. Artill. auf der letzten Seite, wo man aber annehmen muß, daß die Geschwindigkeit bekannt ist, mit der eine Kugel aus einer Canone fährt.

Ueber das Gesetz der Stetigkeit.

183. Bey den nur angeführten Untersuchungen setzt man zum voraus, daß sich eines Körpers Geschwindigkeit nicht plötzlich, sondern nur durch unendlich kleine Stufen ändere. Eben das kann man auch von der Richtung sagen. Ein Körper, der reflectirt wird, ändert, wenn man die Sache auf diese Art betrachtet, seine vorige Richtung nicht plötzlich in die entgegengesetzte; seine Geschwindigkeit nach der ersten Richtung wird immer geringer und geringer, verschwindet endlich, und verwandelt sich alsdenn in eine nach der entgegengesetzten Richtung. Das ist das Gesetz der Stetigkeit auf diese Gegenstände angewandt. Man behauptet nähmlich vermöge dieses Gesetzes allgemein, daß keine Veränderung plötzlich geschehe, sondern daß jede, allemahl durch unendlich kleine Stufen gehe, davon in der Geometrie der Gang eines Punctes in einer krummen Linie schon ein Beyspiel ist (Geom. 6. Erkl. Anm.).

184. Die-

184. Dieses Gesetz der Stetigkeit findet bey völlig harten Körpern nicht statt (132), und dieser Grund ist für einige Mathematikverständige zulänglich gewesen, zu läugnen, daß es vollkommen harte Körper geben könne. Denn die Frage, ob es unter den uns bekannten welche gebe, muß schon, vermöge der Erfahrung, verneint werden. Auch die härtesten Materien, mit denen wir Versuche anstellen können, haben einen Grad der Federkraft. Dieses zeigt unter andern der Schall, den sie geschlagen von sich geben, und der nicht anders als aus Erschütterungen der Theilchen der Körper und durch die umliegende Luft, begreiflich ist, welches Elasticität voraussetzt. Wenn man auf eine spiegelglatt polirte stählerne Ebene haucht, daß sie davon matt wird, und alsdenn darauf eine Kugel von harten Steine fallen läßt, so bezeichnet die Kugel, auf der Stelle, wo sie auffiel, einen runden Fleck, der desto grösser ist, je höher sie herabgefallen war, zum Beweise, daß sie an der Berührugsstelle platt geworden war, und dieses destomehr, je stärker sie aufschlug: Ihr Zurückspringen rührt von der Wiederherstellung ihrer vorigen Gestalt her.

185. Man sieht leicht, daß die Körper ohne Ende theilbar seyn müssen, wenn es keine vollkommen harte geben kann. Denn sonst würden die Theilchen jedes Körpers auf die man zuletzt käme, doch Atomen von unveränderlicher Härte seyn; Dergleichen anzunehmen, war Newton geneigt, und hält die Härte für eine Eigenschaft jeder einfachen Materie Optic. qu. 22. und anderswo stellt er sich vor,

jede

jede Art von Materie, Wasser, Erde u. s. w. müsse aus einer ihr eigenen Gattung solcher unveränderlichen Theilchen bestehen, woraus begreiflich werde, wie diese Materien, so lange wir Nachrichten von ihnen haben, immer einerley Eigenschaften behalten können. Besteht nun ein Körper aus solchen festen Atomen, so werden diejenigen derselben, die zuerst mit den Atomen eines andern Körpers in Berührung kommen, solche plötzliche Veränderungen ihrer Geschwindigkeit und Richtung leiden müssen, wie bey harten Körpern geschehen; und so läßt sich die Möglichkeit solcher plötzlichen Veränderungen nicht läugnen, wenn man nicht zugleich die unendliche Theilbarkeit der Materie annimmt. Herr Beguelin in einer Abhandlung sur l'existence des corps durs Mem. de l' Ac. de Pr. 1751. (der Titel dieses VII. Theiles hat durch einen Druckfehler 1752.) p. 331. hat zu zeigen gesucht, das Gesetz der Stetigkeit finde selbst bey dem Stosse elastischer Körper nicht statt. Er setzt nähmlich einen elastischen Körper aus kleinen harten zusammen, die sich an einander lassen, und wieder auseinander begeben; und da brauchte es wohl nicht so viel Weitläuftigkeit, darzuthun, daß mit denen, von diesen kleinen harten Theilchen, die zuerst in Berührung kommen, eben das vorgehen muß, was mit ganzen grossen harten Körpern vorginge.

186. Der Wiederspruch zwischen dem Gesetze der Stetigkeit, und vollkommen harten Körpern, den Herr Euler als einen Beweis der unendlichen Theilbarkeit

barkeit der Materie ansieht, liesse sich gleichwohl auf eine Art heben, die der P. Boscowich, in einer Abhandlung de viribus viuis Comm. Bononiens. T. II. P. II. angegeben hat. Was wir nähmlich einen Stoß nennen, geschieht nicht vermittelst wirklicher Berührung. Körper, die sich einander nähern, wirken in einander durch anziehende und zurücktreibende Kräfte, und so ändern sich ihre Geschwindigkeiten, wie die Geschwindigkeiten fallender oder steigender schwerer Körper, nach dem Gesetze der Stetigkeit. Eben wie nach der newtonischen Erklärung, Licht das gebrochen wird, seinen Weg nicht plötzlich in der brechenden Fläche, sondern, wegen der anziehenden Kräfte der Mittel, ehe es diese Fläche erreicht, nach und nach ändert.

187. Hiebey wird man aber wohl natürlich auf die Frage kommen: Ob denn das Gesetz der Stetigkeit, in solcher Allgemeinheit und Schärfe dargethan sey, daß sich dergleichen Folgerungen daraus machen lassen. Ich muß gestehen, daß mir kein stärkerer Beweis davon bekannt ist, als die Erinnerung, daß es in unzählichen Fällen in der Natur, vermöge der Erfahrung, richtig befunden wird. Ob man dieserwegen berechtiget sey, es auf alles zu erstrecken, was auch nicht unter unsere Erfahrung fällt, davon will ich jedem sein Urtheil überlassen.

188. Der Aehnlichkeit wegen erinnere ich hier gleich nur dieses: das Gesetz der Stetigkeit in der Geomatrie, wird bey krummen Linien unverbrüch-

lich in Acht genommen; aber kann es auch bey geradelinichten Figuren beybehalten werden? Ist es schlechterdings unmöglich, daß ein Punct seinen Weg plötzlich ändert, so kann kein Punct in dem Umfange eines Vierecks oder Dreyecks herumgehen. Wenn also das Gesetz der Stetigkeit in der Geometrie so grosse Ausnahmen leidet, so kann dieses schon einen Zweifel erregen, ob es auch in der Mechanik ganz allgemein seyn mag.

189. Dieses wird sich am besten erläutern, wenn man untersucht, was eigentlich dieses Gesetz der Stetigkeit befiehlt. Jede Veränderung soll durch unendlich kleine Stuffen geschehen. Nach den Begriffen vom Unendlich kleinen, die mir allein die richtigen scheinen (Geom. 11. S. 3. Zus. 12. S. 12. Zus. An. Un. 1. u. f.), kann ich dieses nicht anders als so ausdrücken: Zu jeder Veränderung gehören wenigstens zweene Zustände, ein vorhergehender und ein folgender, die beyde dergestalt von einander unterschieden sind, daß sich der Unterschied dieses von jenem angeben läßt. Nun verbietet das Gesetz der Stetigkeit der Sache, die verändert wird, sogleich aus jenem in diesem überzugehen. Sie muß durch einen mittlern Zustand durchgehn, der vom vorhergehenden nicht soviel unterschieden ist, als der folgende. Und weil sich der Unterschied dieses mittlern Zustandes und des vorhergehenden, noch wird angeben lassen, so muß zwischen beyden ein neuer mittlerer Zustand seyn, und dieses immer so fortgesetzt werden, bis der Unterschied zwischen

dem

dem vorhergehenden Zustande, und seinem nächstfolgenden sich verlieret. So lange die Menge dieser Zwischenzustände sich angeben läßt, so lange läßt sich auch jedes Unterschied von seinem nächsten angeben: Also muß ihre Menge grösser, als jede gegebene Menge werden, wenn diese Unterschiede verschwinden sollen, und so stellt man sich unzählich viel Zustände, jedem von seinen nächsten unendlich wenig unterschieden vor. Ehe sich eines Körpers Geschwindigkeit a in α verändert, muß sie sich in u, deren Grösse zwischen a und α fällt, verändern, und noch zuvor in v, deren Grösse zwischen a und u fällt, u. s. w. Dieß ist eigentlich die Bedeutung des Ausdrucks, daß die beyden nächsten Geschwindigkeiten v und $v + dv$ sind (I. Abschn. 14).

190. Wenn mittlerer Zustand so viel heißt, als ein Zustand in den etwas kommen muß, ehe es aus einem vorhergehenden in einen folgenden kommen kann, so räume ich willig ein, daß jede Veränderung, durch einen oder mehr solche mittlere Zustände geschieht, daß die Raupe sich als Puppe zeigt, ehe sie als Schmetterling fliegt, daß aus den Speisen, die wir zu uns nehmen, anfangs Chylus, denn Blut, und darnach erst Fleisch und Knochen werden; dieses will weiter nichts sagen, als daß in der Natur Ordnung und Zusammenhang ist; Aber daß dieser mittlern Zustände unzählich viel seyn müssen, davon giebt die Erfahrung mir keinen Beweis; denn, daß ihrer oft soviel sind, daß wir sie zu zählen ermüden, daß

ihre Gränze schwimmt und in einander fließt

v. Haller

und es sich damit verhält, wie bey dem Regenbogen

In quo diuersi niteant cum mille colores
Transitus ipse tamen spectantia lumina fallit
Vsque adeo quod tangit idem est, tamen vltima distant.

Metamorph. VI. 65.

Dieses beweist nur, daß die Sache uns so vorkömmt, nicht daß sie so ist; so könnte man auch eine zart gezogene gerade Linie in allen ihren Theilen für wirklich gerade, oder gar für eine geometrische gerade Linie erklären, und für gewiß setzen, daß ein Stück Glas ein continuum vom Glase sey.

191. Läßt sich denn etwa durch Schlüsse aus Begriffen, hierinnen mehr darthun, als durch die Erfahrung? Muß zwischen jedem Zustande und einem andern, dessen Unterschied vom vorigen anzugeben ist, einer seyn, der sich weniger unterscheidet? Könnten nicht zweene Zustände unmittelbar nach einander folgen, deren jeder so bestimmt wäre, daß sich angeben liesse, worinnen er sich von dem andern unterscheidet, so daß man zwischen beyde keinen einschieben könnte, diesen Unterschied zu vermindern? Die Vertheidiger des Gesetzes der Stetigkeit behaupten, ohne dasselbe lasse sich nicht begreifen, wie ein folgender Zustand aus dem vorhergehenden entstehe, wie die Geschwindigkeit c nach a entstehen könne, wenn nicht v zwischen beyde fällt.

fällt. Ich will jetzo nicht fragen, ob man ohne das Gesetz der Stetigkeit begreifen könne, wie ein folgender Zustand aus dem vorhergehenden entsteht, ich will erst fragen: ob man es dadurch begreift? Dieses Begreifen müßte etwa so zugehen: Wie entsteht der letzte Zustand aus dem ersten? durch einen mittlern; und dieser aus dem ersten? wieder durch einen mittlern; und dieser aus dem ersten? wieder durch einen mittlern? ..... Heißt das meine Frage beantworten, wenn man mir immer befiehlt sie von neuem zu thun? Ich stelle mir einen Genealogisten aus den Zeiten vor, wo man die Geschlechtregister aller grossen Herrn bis auf Adam anzugeben wußte. Zwischen Ihro Majestät und Adam, sagt er, ist ihr Herr Vater gottseeligsten Andenkens (denn damahls suchten noch alle Könige diesen Ehrentitel nach ihrem Tode zu haben) und zwischen dem und Adam, ihr Herr Großvater, und zwischen dem und Adam, ihr Herr Großgroßvater, und so ist immer zwischen einem ihrer Ahnen und Adam wieder einer, nie aber kömmt man auf einen, zwischen dem und Adam keiner wäre. Ich glaube, das wäre für den König etwas subtil geredet gewesen, hätte sich der Ehrenhold aber deutlicher ausgedrückt und gesagt: J. M. stammen von Adam her, aber von keinem seiner Söhne und Töchter, so würde er für seinen Stammbaum vermuthlich eine schlechte Belohnung erhalten haben —. Und das hiesse doch, nach dem Gesetze der Stetigkeit begreiflich machen, wie ein König von Adam herstammt.

192. Vielleicht ist dieses mein Gleichniß nicht ganz ein Gewäsch. Es kann erläutern, wie sich ein letzter Zustand aus dem ersten, ohne das Gesetz der Stetigkeit begreifen liesse. Kann sich ein Zustand vom nächstvorhergehenden nicht durch so bestimmte Unterschiede absondern, wie Sohn vom Vater, und doch eben so von ihm entstehen? Ich weiß niemanden, der das Gegentheil dargethan hätte. Wenn zweene harte Körper einander mit gleichen Bewegungen begegnen, sagt Joh. Bernoulli (disc. sur le mouv. ch. 1. art. 7.), so können sie einander nicht sogleich aufhalten, ohne plötzlich aus der Bewegung in die Ruhe, aus dem Seyn ins Nichtseyn, überzugehen, das ist aber wieder das Gesetz der Stetigkeit —. Ohne Zweifel sieht Bernoulli also für ungereimt an, daß Ruhe gleich aus Bewegung folgen soll. Aber ist es nicht begreiflich genug, daß zwo entgegengesetzte gleiche Bewegungen einander aufheben, daß Nichts bleibt, wenn ich von einem Dinge etwas wegnehme, das ihm gleich ist, und daß also Ruhe eine unmittelbare Folge aufgehobener Bewegungen ist? Ohngefähr diese Erinnerung gegen Bernoullin macht Mac Laurin Account of Sir Isaac Newtons philosophical discoveries B. 1. ch. 4. p. 88. Wie Ruhe gleich auf Bewegung folgt, ist meines Erachtens nicht unbegreiflicher, als wie geringere Geschwindigkeit auf grössere folgt. Ein Grund der Folge muß da seyn. In einer unendlichen Reihe mittlerer Geschwindigkeiten, sehe ich denselben nicht. Auch sehe ich nicht, wie dieses Gesetz der Stetigkeit, oder

wie man es sonst ausdrückt; daß die Natur keinen Sprung thue; selbst bey unendlich kleinen Veränderungen, die man doch annehmen muß, erhalten werde, denn unendlich kleine Sprünge sind doch auch Sprünge, und scheinen mir der Stetigkeit so sehr zuwieder als grosse. Diese Erinnerung, die der Herr v. Maupertuis macht Mem. de l'Ac. de Pr. 1746. p. 284. gilt besonders wieder diejenigen, die das Unendlich kleine in etwas eigentlicherm Verstande nehmen, als ich.

193. Folgendes, deucht mich, wird etwas zur Erläuterung beytragen: Wenn wir uns Etwas als stetig (continuum) vorstellen, so unterscheiden wir seine Theile durch nichts weiter als durch ihre Grösse: In der Natur finden wir, wenigstens so weit als unsere Erfahrung geht, daß jeder Theil aus dem ein Ganzes besteht, bestimmt, und von dem andern noch durch andere Eigenschaften, als blos durch die Grösse unterschieden ist. Daher lassen sich in dem angenommenen Stetigen, Abschnitte machen, Stücken von einander sondern, wo man will, aber nicht in wirklichen Dingen. So unterscheiden sich der geometrische Raum, und der natürliche Körper (Geom. 3. Erkl.) Den Raum, den ein Haufen Schießpulver einnimmt, kann ich durch geometrische Ebenen in Theile, wie ich will, absondern, und diese Theile zusammen machen allemahl das Ganze aus: Im Schießpulver selbst würden diese Ebenen oft Körner zerschneiden, und als Pulver; zerstören, daß man nach vollendeten Abtheilungen nicht soviel

Schießpulver mehr hätte, als zuvor. Dieses, was so offenbahr bey dem Stetigen ist, dessen Theile alle zugleich da sind (simultaneum), wende man auf das an, dessen Theile nach einander folgen (successuum). Zweene nacheinander folgende Zustände, können jeder eben sowohl ihre wesentlichen Gränzen haben, wie zwey aneinander liegende Pulverkörnchen. Der Geometer kann den Raum dieser beyden Körnchen, wie er will eintheilen, aber daraus folgt nicht, daß er eben die Körnchen als Körnchen so eintheilen könne; Und so kann er sich die beyden Zustände, nur nach dem Zeitraume, den sie einnehmen, vorstellen, und diesen Zeitraum in mehr als zweene Theile theilen, und sich in jedem Theile einen andern Zustand vorstellen, also zwischen die beyden erwähnten soviel mittlere, als er will, setzen; welche mittlern selbst alsdenn Theile des einen oder des andern seyn würden, wie die Theile des Raums der beyden Pulverkörnchen, Theile dieser Körnchen heissen könnten. Wenn aber dem Geometer das bey seiner abstracten Vorstellung frey steht, folgt, daß eben das in der Natur selbst statt finde? Ich glaube vielmehr Gründe für das Gegentheil zu sehen.

194. Was wirklich vorhanden ist, ist in aller Absicht bestimmt, hat seine eigene Gränzen, und bleibt nicht das Ding, das es ist, wenn man in diesen ihm wesentlichen Bestimmungen und Gränzen was ändert. Bey abstracten Begriffen lassen wir diese jedem Dinge eigne Bestimmungen von seiner Vorstellung weg, und denken nur an das, was

es mit mehrern gemein hat. Die wirkliche Sachen sind also ganz was anders, als die abstracten Vorstellungen von ihnen. Das ist hoffentlich so lange ausgemacht, als die Streitigkeiten der Nominalium und Realium ins Reich der Vergessenheit verwiesen sind. Daher kann man sich in der Abstraction Bestimmungen und Absonderungen nach Gefallen erdenken, die in der Wirklichkeit nicht statt finden. Wenn v in v + dv fließt, so nennt einer der Mathematikverständigen, welche die Lehre vom Unendlichen am gründlichsten vorgetragen haben, Hausen El. Arithm. Schol. Pr. 20; dv, seiner Natur nach unbestimmbar (natura sua indeterminabilem). Wie kann man also sagen, die Veränderung der Geschwindigkeit werde begreiflich, wenn aus v, v + dv wird, das ist, wenn zu v etwas kömmt, das sich nicht angeben läßt? Sollen v und v + dv beyde was wirkliches seyn, so muß jede für sich was bestimmtes seyn, und kann also das zweyte aus dem ersten durch einen Zusatz werden, der sich nicht bestimmen läßt? Barrow, von dessen Lehren nur noch ein kleiner Schritt bis zur Rechnung des Unendlichen war, drückt sich hierüber sehr richtig so aus: „Eine fliessende und ungewisse Grösse haben, heißt keine haben; was ist, ist auf eine bestimmte Art, was überall ist, ist nirgends„ (desultoriam & indeterminatam quantitatem habere, est habere nullam, est enim aliquid determinate quicquid est, quod vbique est nullibi est. *Lect. Math.* a. 1666. quinta p. 262. ed. Lond. 1684.).

195. Alsdenn also kann man meines Erachtens, das Gesetz der Stetigkeit anbringen, wenn in einer Reihe nacheinander folgender Zustände nichts angenommen wird, das einen von dem andern durch bestimmte Gränzen absonderte. So verhält es sich bey der sich beständig ändernden Geschwindigkeit eines fallenden Körpers, wie ich I. Abschn. 68. schon angenommen habe, und bey dem Stosse nicht vollkommen harter Körper. Erhellt aber aus der Natur der Sache, daß nach dem jetzigen Zustande, nicht jeder andere ihm nach Gefallen nachfolgen könne, sondern ein gewisser bestimmter folgen müsse, der sich von jenem, auf eine Art die sich angeben läßt, unterscheidet, so möchte Mac Laurin, wohl recht haben, wenn er Treat. on Flux. §. 520. rem.) sagt: das Gesetz der Stetigkeit werde ohne zureichenden Grund für allgemein angenommen. Mich deucht, aus ihm zu schliessen, daß es keine harten Körper geben könne, ist man nicht mehr berechtiget, als daraus zu folgern, daß es keine geradelinichten Figuren geben könne.

196. Hiebey kömmt meinem Urtheile nach vieles darauf an, ob man blos von Erscheinungen, oder von dem Wirklichen redet, das die Erscheinung darstellt, besonders, wenn von den ersten Ursachen dieser Erscheinungen die Rede ist. Ich kann ohne Irrthum ein Stück Glas als ein continuum ansehen; es stellt sich allen meinen Empfindungen so dar; und doch kann ich durch Schlüsse versichert seyn, daß es keines ist. Wie man also die Stetigkeit in

zugleich

zugleich vorhandenen Dingen, als eine Erscheinung mit Recht gebraucht, so kann man auch eben so weit die Stetigkeit in der Folge gelten lassen. Daher ist dieses Gesetz in Berechnung der Naturbegebenten von grossen Nutzen; denn unsere ganze Kenntniß der Natur, ist doch nichts weiter als eine Kenntniß von Erscheinungen, die uns ganz was anders darstellen würden, wenn wir das wirkliche in ihnen sähen. Wer aber dieses Gesetz auf das wirkliche erstrecken will, muß seine Schlüsse durch ein anderes Verfahren rechtfertigen, als durch ein solches, wobey der Verdacht übrig bleibt, er habe Bilder für Sachen genommen.

Die bisherigen Gedanken (183...196.) sind von mir, mit noch mehr Erläuterungen, in einer 1750 zu Leipzig herausgegebenen Schrift, de lege continui in natura ausgeführt worden. Sie scheinen mir hier ihre natürliche Stelle zu haben, da der Stoß der Körper zu solchen Betrachtungen Veranlassung giebt, und es mir auch von Wichtigkeit schiene, den Gebrauch, den man von diesen mathematischen Lehren hat machen wollen, zu zeigen und zu prüfen.

197. Eine richtige Anwendung dieses Gesetzes will ich doch hier noch beybringen, weil sie nebst einer Probe von seinem Gebrauche, auch die vorhin (I. Abschn. 21. u. f. und hier 125. u. f. u. 177) gegebenen Begriffe von der Trägheit, der Gegenwirkung und der Vergleichung lebendiger und todter Kräfte erläutern kann. Bey Gelegenheit der Trägheit

heit stellen einige Naturforscher Versuche an, davon sich das Wesentlichste ohngefähr so beschreiben läßt. Das Gewicht C 1. Taf. 6 F. soll auf einer Unterstützung, einem Brete oder so was liegen, daß es nicht sinkt, aber vermittelst des Fadens der von ihm nach der Rolle D geht, in die Höhe gezogen werden kann; dieser Faden geht um die Rolle, auf der andern Seite herum, und hat an seinem Ende das Gewicht A. Seine Länge, von dieser andern Seite der Rolle, bis an das dortige Gewicht, oder was in der Figur von der Rolle bis an A herunter geht, heisse x; A sey grösser als C; Nun hebe man A auf, daß der Theil des Fadens von der Rolle bis an dieses Gewicht, nicht mehr gespannt bleibt, halte es also ganz nahe an die Rolle, und lasse es fallen. Wenn nun da der Faden nicht zu stark ist, so wird er reissen, man bemerkt aber nicht, daß sich das Gewicht C erhübe. Auch wird der Faden unter diesen Umständen reissen, wenn er gleich viel schwerere Gewichte als diese beyden sind, an seinen Enden tragen könnte.

Drey diesem ähnliche Versuche beschreibt Herr Prof. Winkler in seinen Untersuchungen der Natur und Kunst, (Leipz. 1765) I. Abschn. von der Kraft der Trägheit 2. Hauptst. Er führt den Faden statt einer Rolle über zwo, oder braucht statt der Rolle einen Wagebalken, welches hier nichts ändert. Er drückt seine Folgerung daraus dergestalt aus: die Stärke der Trägheit, übertreffe die Last ihres eignen Körpers. Mich deucht, nachstehendes ist die natürliche Erklärung des Versuchs, der allerdings

Auf-

Aufmerksamkeit verdient, weil er beym ersten Anblicke unerwartet scheint.

Wenn A von der Rolle herabfält, so fängt es den Faden nicht eher zu spannen an, als bis es durch die Länge x, des von der Rolle herabgehenden Fadens gefallen ist. In diesem Augenblicke da es den Faden zu spannen anfängt, hat es also die Geschwindigkeit w welche der Höhe x zugehört (I. Abschn. 43); und erhielt diese Geschwindigkeit in der Zeit $0{,}008\sqrt{x}$ Secunden (I. Abschn. 38) ginge also mit derselben, in dieser Zeit gleichförmig, durch den Raum $2x$, (I. Abschn. 39) folglich in einer Secunde durch den Raum $250\sqrt{x}$ welchen Raum man durch w ausdrücken kann. Nun wird aber, wenn der Faden nicht reißt, C mit A zugleich fortgeführt werden. Dazu ist in diesem Augenblicke nöthig, daß sich die Bewegung der Masse A, wie beym Stosse unelastischer Körper, und nach den Gesetzen der Wirkung und Gegenwirkung unter beyde Massen, die bewegte und die ruhende mittheilt, so daß beyder gemeinschaftliche Geschwindigkeit $\frac{Aw}{A+C}$ ist.

Ich rede hier, wie man leicht sieht, von dem was sich im ersten Augenblicke ereignet, denn in dem folgenden wird A durch die Schwere beschleunigt. Mit dieser Geschwindigkeit also müßte in diesem Augenblick, A sinken und C steigen. Weil aber vermöge des Gesetzes der Stetigkeit eine solche Geschwindigkeit in C nicht plötzlich entstehen kann, so wird es eine gewisse, vielleicht kleine, aber doch bestimmte

Zeit

Zeit dauern, bis C solche erlangt, und vor Ablauf dieser Zeit, hat C anfangs gar keine, und denn, doch nur eine geringere Geschwindigkeit, das ist, es ist in Vergleichung mit A als ruhend anzusehen, dem es nicht so schnell folgt, als A vorausgehn will. Der Faden wird also zwischen beyden so gezogen, als wenn er bey C an was unbewegliches geheftet wäre; Daß ihn das bewegte Gewicht A unter diesen Umständen zerreissen kann, wenn er gleich stark genug wäre, es ruhig zu tragen, wird niemanden befremden, der sich aus (180) erinnert, was für ein Unterschied unter Druck und Bewegung ist. Warum aber C ruhig liegen bleibt, wird begreiflich werden, wenn man überlegt, daß der Faden eher reissen kann, als eine merkliche Geschwindigkeit in C erregt wird. Der Faden reißt also freylich nicht wegen des Gewichts von C, sondern wegen seiner Trägheit und des Gesetzes der Stetigkeit, welches letztere den Grund angibt, warum C sich nicht bewegt. Und weil auf diese Art kleine Gewichte einen Faden zerreissen, der grössere ruhig tragen konnte, so erfolgt hier aus der Trägheit und dem Gesetze der Stetigkeit mehr als aus der blossen Last der Gewichte erfolgen würde. In dieser Bedeutung läßt sich also meines Erachtens der Ausdruck rechtfertigen, die Trägheit des Gewichtes sey stärker als seine Last, den ich gleichwohl nicht brauchen werde, weil er obenhin betrachtet, dem Grundsatze zu widersprechen scheint, daß die Trägheit, wie das Gewicht, der Masse proportionirt ist.

Wollte man die fortgesetzte Bewegung nach dem erwähnten ersten Augenblicke betrachten, so dürfte man nur nach I. Abschn. 51. 34. Seit. sich vorstellen, daß C so fällt, als würde es von einer Schwere getrieben, die $\frac{C}{C+A}$ der unsrigen wäre. Dieß also müßte im I. Abschn. 81. statt f; statt des dortigen c, die Höhe gesetzt werden, welche der vorhin bestimmten gemeinschaftlichen Geschwindigkeit im ersten Augenblicke des Falles zugehörte.

In Hrn. Winklers Versuchen war c=8 Loth, A=2 Pfund, 25 ½ Loth =89,5 Loth, x=5 Fuß. Ein gleicher Faden trug an jedem Ende ruhig 3 ½ Pf. bis er riß. Wenn man die Fuß für rheinländische annimmt, und x=5000 setzt, so ist $\sqrt{5000}$=70,710 und A fällt durch seinen Theil des Fadens in 0,008.7,0710 = 0,565 Secunden; Mit der Geschwindigkeit, die es am Ende dieses Falls hat, ginge es in einer eben so langen Zeit durch 10 Fuß, und in einer Secunde durch 250.70,710 oder durch 17,677 Fuß. Drückt man die Geschwindigkeit durch diese Menge von Fußen aus, so wäre die gemeinschaftliche Geschwindigkeit, mit der sich beyde Massen im ersten Augenblicke bewegen müßten $\frac{89,5.17,67}{89,5+8}$ =16 F in einer Secunde. Setzt man im I. Abschn. 41; S=15625; T=1=b; a=16000; so findet man die Zeit, in welcher eine solche Geschwindigkeit durch die Wirkung unserer Schwere ent-

entstünde $\frac{16000}{31250} = \frac{64}{125} = 0,512$ einer Secunde.

Dieses wird begreiflich machen, wie eine gewisse Zeit nöthig ist, sie durch jede andere Wirkung zu erzeugen, und wie es möglich ist, daß der Faden reißt, ehe sie ist erzeugt worden. Man hat schon längst ähnliche Versuche gemacht, dergleichen Herr W. auch anführt, da man ein dünnes Stäbchen auf ein paar Gläsern zerschlägt, ohne daß sie umfallen; Schwenter math. Erquikst. X. Theil 3. Aufg. hat diese Begebenheit im Grunde ziemlich richtig erklärt, ob er sich wohl nicht ausführlich und deutlich genug ausdrückt.

Vom Maasse der Kräfte.

198. Ein schwerer Körper, der aus K 5. Fig. bis L steigen soll, muß bekannter massen mit der Geschwindigkeit aus K zu steigen anfangen, die er vermöge des Falls durch LK erhalten hätte, weil die Schwere ihm im Aufsteigen eben die Geschwindigkeit nimmt, die sie ihm im Fallen gegeben hatte. Und eben so muß ein Körper, der aus Q bis in A 7. F. steigen soll, in Q mit der Geschwindigkeit zu steigen anfangen, die ihm der Fall durch AQ gegeben hatte. Die Quadrate der Geschwindigkeiten also mit denen beyde Körper zu steigen anfangen, verhalten sich wie die Höhen auf welche sie steigen (1. Abschn. 43).

199. Nimmt man also an, daß sich die Kräfte, mit denen beyde Körper steigen, wie die Höhen verhalten,

halten, auf welche sie steigen, daß der Körper zweymahl soviel Kraft hat, der zweymahl so hochsteigt, so verhalten sich diese Kräfte, wie die Quadrate der Geschwindigkeiten; der noch einmahl so hoch steigen soll, muß sein Steigen mit der vierfachen Geschwindigkeit anfangen, und verliert, bis er alle Geschwindigkeit, und damit alle Kraft zu steigen verliert, viermahl soviel, als der nur durch die einfache Höhe stieg.

200. Sind also die beyden Massen M; m; die anfänglichen Geschwindigkeiten C; c; und stellt man sich eine Masse N = M vor, die mit der Geschwindigkeit c zu steigen anfängt, so verbinde man nur mit 199; den offenbahren Satz, daß bey einerley Geschwindigkeit die Kräfte sich wie die Massen verhalten werden; alsdenn ist

Kraft von M: Kraft von N = $C^2 : c^2$ (199)
Kraft von N: Kraft von m = M : m also

Kraft von M: Kraft von m = $M.C^2 : m.c^2$

oder die Kräfte in der angenommenen Bedeutung verhalten sich wie die Producte aus den Quadraten der Geschwindigkeiten in die Massen.

201. Auf diese Betrachtungen hat Leibniz die nur gegebene Ausmessung der Kräfte gegründet, die man von ihm die Leibnizische nennt. Act. Er. Lipſ. Mart. 1686. p. 161. Er setzte solche den Cartesianern entgegen, welche die Kraft eines Körpers durch das Product aus seiner Masse in die Geschwindigkeit, aus dem Grunde maassen, weil zwee-

ne Körper, deren Bewegungen einander entgegengesetzt sind, einander aufhalten, wenn dieses Product bey einem so groß als bey dem andern ist (Stat. 53; hier 104). Leibniz beruft sich zu Bestätigung seiner Lehre noch auf den Satz, worauf Cartes die Statik gründet, daß so viel Kraft nöthig sey, ein Pfund durch die vierfache Höhe, als 4 Pf. durch die einfache zu erheben (Stat. 54; hier 65; 73), oder daß die Kräfte gleich sind, wenn KL: QA = m: M welches also nach 198; $C^2 : c^2 = m : M$ giebt. Dieses noch weiter zu erläutern, hat er Specim. dynamic. A. E. Apr. 1695; die Kräfte in todte und lebendige (Stat. 1.) getheilt; und die erste in Vergleichung mit der letzten elementarisch genannt (181), wie nach seinem Erinnern schon Galiläus, die Kraft des Stosses unendlich genannt hatte, wenn man sie nähmlich mit dem blossen Drucke der Schwere vergleicht. Daher pflegt man eben diese leibnizische Berechnung der Kräfte, das Maas der lebendigen Kräfte zu nennen, weil es für Kräfte angenommen wird, bey denen sich wirkliche Bewegung befindet, so die das cartesianische für todte gilt.

202. Diese Ausmessung der Kräfte hat eine Streitigkeit veranlaßt, deren Geschichte allein einen Band, wie gegenwärtige Mechanik ist, ausmachen würde, da sich die grösten Mathematikverständigen getheilt, und einige die Kräfte auf die cartesische, andere auf die leibnizische Art gemessen haben. Da die leibnizische Ausmessung in der 199 angenommenen Bedeutung der Worte offenbar ist,

so

so sieht man ohne Weitläuftigkeit, daß die Streitenden das Wort Kraft in unterschiedenen Bedeutungen müssen genommen haben. Es erhellt dieses auch aus den mancherley Beweisen, die jeder für seine Meynung angeführt hat. Es sind allerley Wirkungen der Körper berechnet worden, daraus ihre Kräfte zu schätzen; Man hat solche Wirkungen durch Versuche ausmachen wollen, man hat die Zeiten, in denen die Wirkungen geschehen, in Betrachtung gezogen, weil einerley Kraft in anderer Zeit was anders wirkt u. s. w. Kurz man hat nicht gestritten, ob die Kraft durch C. M oder C^2. M zu messen sey, sondern ob man C. M oder C^2. M Kraft nennen soll. Dieser Streit ist also, ihm den rechten Nahmen aus der griechischen Grundsprache zu geben, eine Logomachie gewesen; doch ist selbst ein solcher Wortstreit, in der Mathematik lehrreicher gewesen; als Wortstreite in andern Theilen der Gelehrsamkeit zu seyn pflegen. Denn die vielfältigen Untersuchungen, Auflösungen von Aufgaben u. d. g. die er veranlaßt hat, haben doch unsere Kenntniß wirklich erweitert. Ich nenne daher einige der vornehmsten hieher gehörigen Schriften, und darunter mit solche, die man etwa in Deutschland am leichtesten wird haben, und sich daraus unterrichten können.

203. Joh. Bernoullis oft angeführter disc. sur le mouvement (157. XIII.) gehört vorzüglich hieher, wo das leibnizische Kräftenmaaß durch verschiedene Gründe ist vertheidigt worden. In dem ersten Bande der Comm. Petrop. findet man unter-

schiedene Aufsätze wegen dieser Streitigkeit, die damahls Mode war; Als: Bilfinger de Virib. corp. moto insitis & illarum mensura p. 43. Wolfs Principia dynamica p. 217. beyde für Leibnizen. Wolfs principiis dynamicis hat Jac. Jurin principia dynamica entgegengesetzt, Philos. Transact. n. 479; art. 4; auch Transl. n. 476; art. 14; eine Untersuchung des Maasses der Kräfte bewegter Körper mitgetheilt, und einen entscheidenden Versuch in dieser Streitigkeit vorgeschlagen. Wolf hat auch von den Maasse der Kräfte in s. Cosmologia generali Sect. II. c. 4. gehandelt. Joh. Bernoulli de vera notione virium viuar. earumque vsu in dynamicis Act. Er. Lipsl. 1735; Mai. p. 210. Op. T. III. n. 145. Eine ziemlich vollständige Sammlung dessen, was sich hierüber sagen läßt, ist Dialogo di Vincenzio Riccati della Compagnia di Gesu; dove ne' congressi di piu' giornate, delle forze vive e dell' azioni delle forze morte si tien discorso. Bologna 1749; 419. Quartseiten. Das Werk ist in Gesprächen abgefaßt, welchen Vortrag die Italiäner noch sehr lieben, und der sich hier wenigstens gut schickt. Della Forza de' corpi che chiamano viva libri tre, del Sigr. Francesco Maria Zanotti &c. Bol. 1752; 311. Quartseiten, enthält viel Erinnerungen, besonders im III B. gegen das, was Riccati für das Maas der lebendigen Kräfte gesagt hatte. Herr Z. hat sich bemüht, wie er sich ausdrückt, die Frage blos durch metaphysische Untersuchungen (col solo discorso metafisico) zu erläutern, ohne aus der Geometrie und Mechanik was

weiter

weiter anzunehmen, als die bekanntesten und gemeinsten Lehren. Felicis Anton. Balassi opusc. de virib. viu. das zu Bonon. 1752. mit Iac. Mariscotti animaduersion. herausgek. 56. Quartf. enthält auch Anmerkungen über den Riccati. Scharfsinnige Einwendungen gegen die Beweise des leibnizischen Kräftenmaasses finden sich in des Hrn. v. Mairan dissertation sur l'estimation & la mesure des forces motrices des corps. Nouv. Ed. Par. 1741; wozu Lettre de Mr. le Mairan a Madame *** sur la question des forces vives gehört, darinnen er beantwortet, was die Marquise v. Chatelet in ihren Institutions physiques ihm für das leibnische Kräftenmaaß entgegengesetzt hatte. Dieses, mit der Fr. Marquise Antwort ist von der Frau Prof. Gottschedinn deutsch übersetzt, Leipz. 1742 herausgekommen. In Leipzig sind zwischen dem noch lebenden Hrn. Pr. Heinsius und dem seel. M. Friedr. Wilh. Stübner unterschiedene Streitschriften über das Kräftenmaaß gewechselt worden. Dahin gehören eine 1733 vom ersten unter dem seel. Hausen vertheidigte Disputation de viribus motricibus. Stübners Disp. contra virium mensuram Cartesianam, pro Leibnitiana; 1733; Eben dess. demonstratio verae mensurae virium motricium viuar. Heinsius Animaduersiones; Stübners amica responsio ad animaduersiones Heinsii 1734; Heins. Notiones & discrimen virium viuar. & mortuar. 1735. Einen kurzen Begriff der Geschichte dieser Streitigkeit, hat der jetzige Hr. Pr. Arnold zu Erlangen, daselbst 1754 in 2. Disputationen de viribus viuis earumque mensu-

ra gegeben, davon er die erste unter dem Hrn. Pr. v. Windheim, die andere selbst als Präses vertheidigt. Hausen hat in einem zu Leipz. 1741. herausgebenen Programma ad solemnia promotionis magistror. von der Gegenwirkung gehandelt, dem in eben dem Jahre ein anderes ad memoriam Geyerianam ... celebrandam gefolgt ist, wo er das Gewisse in dieser Streitigkeit sehr wohl angegeben hat. Ich will das Wesentliche seiner Gedanken, so wie ich es am besten mit gegenwärtigem Lehrbegriffe verbinden kann, vortragen, weil meiner Einsicht nach, in solcher Kürze sich nichts bessers von dieser Sache schreiben läßt.

204. Während der Zeit, da eine Masse A, von einer beschleunigenden veränderlichen oder unveränderlichen Kraft f; getrieben, den Raum dx durchläuft, nennt Hausen die Kraft dieser Masse Afdx; worunter er also die bewegende Kraft (I. Abschn. 49.) versteht; dieses ist = Adv (I. Abschn. 76.), folglich, wenn sich die Bewegung von der Ruhe anfing, die Summe dieser Kräfte $\int Afdx = Av$, welches sich wie Au^2 verhält (I. Abschn. 75.). Da man sich nun bey jeder Bewegung, auf was für Art sie auch entstanden ist, vorstellen kann, sie entstehe durch anhaltende Wirkung einer beschleunigenden Kraft, so erhellt, daß man sagen kann: die Summe aller Kräfte, durch welche eine gegebene Bewegung erzeugt werden kann, verhalte sich bey einer gegebenen Masse, wie das Quadrat der entstandenen Geschwindigkeit, und bey unterschiedenen Massen, wie das Product aus diesem Quadra-

te

te in die Masse. Es ist aber offenbahr, daß eine vorhandene Bewegung zu vernichten eben eine so grosse Summe von Kräften nöthig ist, als sie zu erzeugen. Nimmt man f unveränderlich an, so ist die Summe = Afx, und verhält sich also auch, wie die Masse mit dem zurückgelegten Raume multiplicirt. In dieser Bedeutung also läßt sich sagen, die Summe der Kräfte, die eine gewisse Bewegung erzeugen, oder sie vernichten, verhalte sich wie das Quadrat der entstandenen oder vernichteten Geschwindigkeit. Man sieht leicht, daß diese Schlüsse Hausens mit den leibnizischen (200) auf einerley Grunde beruhen, und eine gewisse Bedeutung des Wortes Kraft voraus setzen.

Von der Erhaltung der lebendigen Kräfte.

205. Den Satz (164) hat man also dergestalt ausgedrückt: bey elastischen Körpern bleibt die Summe der lebendigen Kräfte vor und nach dem Stosse einerley. Man hat dieses die **Erhaltung der lebendigen Kräfte** genannt, und als ein allgemeines Gesetz der Natur angenommen. In 114; $Mx^2 + mx^2 = MC^2 + mc^2$ gesetzt, gibt $C = c$, also eine Bedingung, unter der kein Stoß geschieht, und eben die Voraussetzung in 110 gebracht, gibt $c = -C$ eben das vorige (111). Also findet die Erhaltung der lebendigen Kräfte bey ganz harten Körpern nicht statt. Aber eben das war noch ein Grund mehr (192), solche Körper aus der wirklichen Welt zu verbannen.

206. Dieses allgemeine Gesetz, wird folgendergestalt ausgedrückt, der Grund davon läßt sich einigermassen aus 204. einsehen: So viel Massen als man will, A, B, C,... wirken in einander durch Fäden, unbiegsame Stäbe (wie Stat. 12.), Federn u. s. w. und machen solchergestalt ein einziges bewegliches System aus. In einem gewissen Augenblicke, haben diese Massen in dieser Verbindung die Geschwindigkeiten K, L, M,... es mögen nun diese Geschwindigkeiten, nur durch der Massen gegenseitige Wirkungen in einander, oder auch noch durch beschleunigende Kräfte, die in die Massen wirken, bestimmt werden. Man setze im Anfange der Bewegung, hätten die Massen die Geschwindigkeiten k, l, m, und stelle sich nun vor, ihre Verbindung würde aufgehoben, sie machten kein System zusammen aus, sondern jede ginge für sich, nur allenfalls von ihrer beschleunigenden Kraft getrieben, den Weg, den sie vorhin als ein Theil des Systems nahm, ohne übrigens in die andere zu wirken. Wenn jede dahin gekommen ist, wo sie im vorhin erwähnten Augenblicke, als ein Theil des Systems war, so haben sie die Geschwindigkeiten $\varkappa$, λ, μ... Alsdenn sagt man es sey $A.K^2 + B.L^2 + C.M^2 \ldots = A.(k^2 + \varkappa^2) + B.(l^2 + \lambda^2) + C.(m^2 + \mu^2)\ldots$ oder die Summe der lebendigen Kräfte sey in beyden Fällen einerley: Es gehe nähmlich durch die Wirkungen der Massen in einander, die sie im System ausüben, nichts von lebendiger Kraft verlohren, wie das Gesetz erfodert, daß immer einerley lebendige Kraft erhalten wird.

207. I.

207. I. Es wird nöthig seyn, dieses durch ein Exempel zu erläutern: Die schon bekannte Erfindung des Mittelpuncts des Schwunges schickt sich am besten dazu. Aus gegenwärtiger Voraussetzung wird sie folgendergestalt in dem einfachsten Falle bewerkstelligt, der hier zu meiner Absicht, da ich nur ein leichtes Beyspiel suche, am geschicktesten ist.

II. In der 22. F. sind an einer unbiegsamen Stange die Massen B, A, E, der Mittelpunct des Schwunges sey in O und die Stange mache im Anfange mit der Verticallinie durch C, um welches sie sich dreht, einen Winkel, dessen Quersinus = w für den Halbmesser = 1 ist. Wenn nähmlich CE in der 21. F. diese Lage vorstellte, so wäre AG : CE = w : 1, woraus zugleich erhellt, daß CE. w = AG oder daß in der schiefen Lage der Stange 22. F. die Puncte E, A, O, B, um die Höhen CE. w; CA. w; CO. w; CB. w; fallen müssen, wenn jeder für sich in die Verticallinie durch C kommen soll.

III. Nun setze man in O sey der Mittelpunct des Schwunges und CO = a; die Geschwindigkeit, mit der O in einem gewissen Augenblicke der Bewegung in dem Elemente des Kreises fortgeht, den es beschreibt, heisse u. Wenn sich die ganze Stange zugleich bewegen soll, so müssen die Geschwindigkeiten der Massen A, B, E; $\frac{CA.u}{a}$; $\frac{CB.u}{a}$; $\frac{CE.u}{a}$... seyn, und haben also zu u unveränderliche Verhältnisse, wie sich auch u selbst ändern möchte. Wenn also u nun die Geschwindigkeit bedeutet, mit wel-

cher O in die Verticallinie kömmt, so sind die le. bendigen Kräfte der Massen $\frac{CA^2 . u^2}{a^2} . A$; $\frac{CB^2 . u^2}{a^2} . B$; $\frac{CE^2 . u^2}{a^2} . E$....

IIII. Wären aber die Massen, jede für sich, ohne an die Stange befestigt zu seyn, aus den Stellen, die sie in der schiefen Linie CABE einnahmen, bis in die Verticallinie gefallen, so hatten sie jede durch ihren Fall durch ihre vorhin angegebene Höhe (11), eine Geschwindigkeit erlangt, deren Quadrat sich, wie diese Höhe verhielte, und also gäbe jede Masse mit ihrer Höhe multiplicirt, ihre lebendige Kraft, wenn sie solchergestalt für sich ohne die Verbindung mit den übrigen gefallen wäre. Sollen also die gegenseitigen Wirkungen der Massen, wie sie mit einander verbunden sind, im Ganzen der lebendigen Kraft nichts ändern, so müssen die lebendigen Kräfte, welche die Massen ohne Verbindung hätten, zusammen so viel betragen, als die lebendigen Kräfte, welche sie in der Verbindung haben. Das ist die Summe der Producte aus den Massen in die Höhen (11) muß so groß seyn, als die Summe der lebendigen Kräfte.

V. Daß in O der Mittelpunct des Schwunges ist, will vermöge der Erklärung desselben (8) so viel sagen: Man soll sich in O einen schweren Punct vorstellen, daß CO ein einfaches Pendel wäre: dieses einfache Pendel, soll aus der schiefen Lage in die verticale, in eben der Zeit kommen, in wel-

welcher die Stange aus der schiefen Lage in die verticale kömmt. Solchergestalt hätte das Gewicht des einfachen Pendels, wenn es in der Verticallinie anlangt, die Geschwindigkeit, die es durch die Höhe seines Falles CO. w = aw (III) erlangt. Dieser Höhe also gehört die Geschwindigkeit u in III. zu, daher ist $u^2 = aw$ und $\frac{u^2}{a^2} = \frac{w}{a}$, folglich die lebendigen Kräfte nach IIII. gleich gesetzt

$$CA.A.w + CB.B.w + CE.E.w \ldots = CA^2.A.\frac{w}{a} + CB^2.B.\frac{w}{a} + CE^2.E.\frac{w}{a} \ldots$$ welches

$$a = \frac{CA^2.A + CB^2.B + CE^2.E..}{CA.A + CB.B. + CE.E}$$

als die bekannte Regel (17) giebt.

VI. Dieses Verfahren hat zuerst Joh. Bernoulli disc. sur le mouvem. chap. 14. gewiesen.

VII. Man setze ein System mit einander verbundener Gewichte A, B, C, ... (wie etwa ein zusammengesetztes Pendul) bewege sich, und vom Anfange der Bewegung, bis an einen gewissen Augenblick, seyn diese Gewichte, um die Höhen a, b, c, gesunken; ihr gemeinschaftlicher Schwerpunct aber um die Höhe v; So sind dieser Gewichte lebendige Kräfte A.a, B.b, C.c... Und wenn man sich die ganze Masse im Schwerpuncte vereinigt vorstellet, wäre ihre lebendige Kraft, die sie als ein Punct, durch den Fall erhalten hätte = (A + B + C...). v

+C...). v. Aendert sich nun, durch die Wirkung der verbundenen Gewichte in einander, nichts im Ganzen der lebendigen Kraft, so haben die verbundenen Massen so viel lebendige Kräfte zusammen, so viel ihre Summe im Schwerpuncte vereinigt haben würde, oder es ist $(A+B+C..).v = A.a+B.b+C.c$ und vermöge dieser lebendigen Kraft, würde der Schwerpunct so hoch wieder steigen können, so tief er gefallen ist, die Gewichte mögen in der Verbindung bleiben oder nicht. Diesen Satz hat Huygens zum Grunde seiner Abhandlung, vom Mittelpuncte des Schwunges gelegt. Hor. Osc. P. IIII. hypoth. 1. Der Nahmen: lebendige Kraft und Erhaltung derselben, hat er sich nicht bedient, ob er wohl auch den Satz 164 gefunden. Weil Huygens Voraussetzung bey der Lehre vom Mittelpuncte des Schwunges etwas dunkel schien, hat man diese Untersuchung, wie schon gezeigt worden, sicherer anzustellen gesucht. Die Voraussetzung hat Joh. Bernoulli de ver. not. vir. viu. §. XXV. auf die angeführte Art gerechtfertiget.

208. Von dem Gesetze der Erhaltung der lebendigen Kräfte, kann man eine kurze Ausführung beym d'Alembert Traité de dynamique II. P. ch. 4. nachlesen. Es ist, seitdem Joh. Bernoulli seinen Gebrauch gewiesen hat, mit grossen Nutzen auf viele und schwere mechanische Aufgaben angewandt worden, die man dadurch eben so, wie aus den gewöhnlichen mechanischen Grundlehren, aber viel leichter, auflöset, daher denn dadurch selbst Untersuchungen

suchungen sind vollendet worden, die wenigstens eine Zeitlang, für die bekannte Anwendung der übrigen mechanischen Grundlehren zu schwer waren. Dahin gehört die Bewegung flüssiger Körper, die Hr. Daniel Bernoulli in s. Hydrodynamica, solchergestalt abgehandelt hat, da sein Vater Joh. B. erst einige Zeit darnach, Mittel fand, sie aus den gewöhnlichen Sätzen herzuleiten. Einzelne Proben von dem weitläuftigen Gebrauche dieses Gesetzes anzuführen, läßt der Raum nicht zu, nur einige Beyspiele zu geben dienen Io. Bern. theoremata de conseru. vir. viuar. Comm. Petr. T. II. p. 200. wo nur die Sätze ohne Beweis und Auflösung stehen, aber Op. T. III. n. 128. findet man sie auch mit Anzeigung der Stellen, wo sie weiter ausgeführt sind.

Von dem Satze der kleinsten Wirkung.

209. Unter diesem Nahmen hat der Herr v. Maupertuis eine Lehre, aus welcher sich Untersuchungen in der Mechanik anstellen lassen, bekannt gemacht. Da dieselbe viel Aufsehens gemacht hat, so ist nöthig, von ihr hier wenigstens einige Nachricht zu ertheilen.

210. Erkl. Die Grösse der Wirkung (quantité d' Action) heißt beym Hrn. v. M. das Product aus der Masse eines Körpers in seine Geschwindigkeit und in den Raum den er durchläuft. Wenn ein Körper aus einem Orte in den andern gebracht wird, so ist die Wirkung desto grösser, je grösser

die

die Masse ist, je schneller die Geschwindigkeit, und je länger der Raum ist durch den er geht.

211. **Satz der kleinsten Wirkung.** Wenn eine Veränderung in der Natur geschieht, so ist die zu dieser Veränderung erforderte Wirkung die kleinste die möglich ist.

212. **Aufg.** Die Gesetze der Bewegung vollkommen harter Körper aus dem Satze der kleinsten Wirkung herzuleiten.

Aufl. Zwo harte Massen A, B, folgen einander mit den Geschwindigkeiten a, b, jene mit der grössern, daß also B von ihr erreicht und gestossen wird. Nach dem Stosse haben, wie leicht zu sehen ist, beyde einerley Geschwindigkeit, die x heissen mag. Weil in einer gegebenen Zeit, bey gleichförmiger Bewegung, der Raum sich wie die Geschwindigkeit verhält, so kann man auch sagen, die beyden Massen, haben vor dem Stosse in einer gewissen Zeit, die Räume a, b, durchlaufen, und durchlaufen nach dem Stosse in eben der Zeit, jede den Raum x. Die Veränderung also, welche sich ereignet hat, ist eben so, als wenn während der Zeit, da sich A, mit seiner Geschwindigkeit a durch den Raum a bewegte, diese Masse, auf einer mathematischen Ebene, rückwärts wäre geführt worden, so daß sich diese Ebene mit der Geschwindigkeit a−x durch den Raum a−x rückwärts bewegt hätte; Und als wenn B während der Zeit, da es sich durch den Raum b mit der Geschwindigkeit b bewegte, von eben einer solchen Fläche, mit der Geschwindigkeit

x−b

$x-b$ durch den Raum $x-b$ wäre vorwärts geführt worden. Von diesen mathematischen Flächen nähmlich, benimmt die erste der Geschwindigkeit, die A vor dem Stosse hatte, so viel als A im Stosse verliert, und die andere setzt der anfänglichen Geschwindigkeit von B so viel, als B im Stosse gewinnt. Da nun die Bewegung der mit den Körpern beladenen Flächen einerley ist, die Körper mögen auf ihnen ruhen oder sich bewegen, so sind die Grössen der hervorgebrachten Wirkungen $A(a-x)^2$; $B.(x-b)^2$, deren Summe ein Kleinstes seyn soll; also ist ihr Differential $=o$ gesetzt:

$$-2aA+2Ax+2Bx-2Bb=o \text{ woraus } x=\frac{Aa+Bb}{A+B}$$

folgt, wie in 114.

213. Aufg. Aus eben dem Satze, die Gesetze der Bewegung bey elastischen Körpern herzuleiten.

Aufl. Die Masse A durchlaufe vor dem Stosse mit der Geschwindigkeit a, den Raum a, nach dem Stosse mit der Geschwindigkeit α den Raum α; B, b, β bedeuten eben das bey der andern Masse, die von A eingehohlt wird. Wenn man die vorigen Betrachtungen (212) wiederhohlt, so findet man endlich die hervorgebrachten Würkungen $A.(a-\alpha)^2$; $B.(\beta-b)^2$ deren Summe ein Kleinstes gesetzt, gibt $-2Aad\alpha+2A\alpha d\alpha+2B\beta d\beta-2Bbd\beta=o$. Weil man sich nun den Stoß elastischer Körper so vorstellen kann, als wären sie blos hart, und eine Feder zwischen ihnen, die im Stosse zusammengedrückt würde und sich wieder ausspannte, die Feder aber

mit

mit der Geschwindigkeit zusammengedrückt wird, mit der sich die Körper einander nähern, also mit ihrer relativen Geschwindigkeit, und folglich mit eben der Gewalt sich wieder ausdehnt, so ist bey elastischen Körpern, die relative Geschwindigkeit vor und nach dem Stosse einerley, also $\beta - \alpha = a - b$ und $\beta = a - b + \alpha$, und $d\beta = d\alpha$; dieser Werth von $d\beta$ in die nur gefundene Gleichung gesetzt, gibt erstlich $-2Aa + 2A\alpha + 2B\beta - 2Bb = o$ und nun statt β seinen Werth gesetzt, kömmt $-2Aa + 2A\alpha + 2Ba - 2Bb + 2B\alpha = o$ und daraus $\alpha = \frac{(A-B).a + 2Bb}{A+B}$ und $a - b + \alpha$ oder $\beta = \frac{(B-A)b + 2Aa}{A+B}$ wie in (135).

214. Das bisherige (210...213) ist nur mit einigen Abkürzungen und Erläuterungen aus des Hrn. v. Maupertuis Essay de Cosmologie übersetzt, der 1750 besonders herausgekommen ist, aber auch in den unterschiedlichen Ausgaben seiner Werke, und gleich im I. B. der zu Lyon 1756. in 4. Octavbänden herausgek. Oeuvres de Mr. Maupertuis zu finden. Christlob Mylius hat ihn deutsch übersetzt; Versuch einer Cosmologie von dem Hrn. v. Maupertuis Berlin 1751. 8°. Eben das steht auch schon in den Mem. de l'Ac. Roy. de Pr. 1746. p. 268. u. f. Weil vermöge dieses Satzes so viel als möglich mit so wenig als möglich ausgerichtet wird, hat man ihn auch das Gesetz der Sparsamkeit genannt.

215. Ich habe hier nur einen Begriff von diesem Satze des Herrn von Maupertuis geben wollen.

Er

Er zeigte selbst noch unterschiedliche Anwendungen von ihm, und glaubte daran eine fruchtbare Grundregel der Mechanik zu haben, die selbst der Erhaltung der lebendigen Kräfte vorzuziehen wäre. Herr Samuel König machte Erinnerungen dagegen, die in den März der Act. Erud. 1751. eingerückt wurden. Dieses hat einen Streit veranlasset, dessen umständliche Geschichte ich aus Achtung für die Wissenschaften ungern abfassen würde, ob ich gleich mit den dazu gehörigen Nachrichten ziemlich vollständig versorgt bin, und darunter auch vielleicht manche nicht eben sehr bekannte besitze. Zum Glücke, gehört ein grosser Theil dieses Streites nicht einmahl zur Mechanik, und das hat doch Gelegenheit gegeben, daß sich Leute in den Streit gemengt haben, die sonst um eine mathematische Frage sich nicht bekümmert hätten. Herr K. hatte ein Stück aus einem leibnizischen Briefe angeführt, welches Herr v. M. so aufnahm, als habe ihm Herr K. dadurch vorwerfen wollen, er habe L. Erfindung für seine ausgegeben, dieserwegen von K. foderte den Brief im Originale darzustellen, und als K. dieses nicht thun konnte, die Königliche Preussische Akademie veranlaßte ein Urtheil über K. zu fällen, das unter der Aufschrift Jugement de l'Ac. Roy. des Sc. & b. l. sur une lettre pretenduë de Mr. de Leibniz zu Berlin 1752. herauskam. K. gab dagegen: Appel au public du jugement de l'Ac. Roy. de Berlin &c. zu Leiden 1752. heraus. Herr v. Voltaire verfertigte bey dieser Veranlassung gegen den Herrn v. M. die histoire du docteur Akakia, die Seance memorable

und andere lustige Schriften. Es ist sonderbar, daß Herr v. B. nach dem Character, den man ihn sonst beylegt, sich wieder das Gesetz der Sparsamkeit erklärt hat. Unter dem Titel: Vollständige Sammlung aller Streitschriften, die neulich über das vorgebliche Gesetz der Natur von der kleinsten Kraft in den Wirkungen der Körper entstanden sind; ist zu Leipzig 1753 eine Sammlung derjenigen Schriften, deutsch übersetzt herausgekommen, die eigentlich das Gesetz der kleinsten Wirkung gar nicht betreffen, sondern, wie ich schon erwähnt habe, sich mit einem andern bey dieser Gelegenheit erregten Streite und größtentheils mit Persönlichkeiten und Spöttereyen beschäfftigen. Lehrreicher in der Hauptsache sind Herrn Eulers diss. de principio minimae actionis Berl. 1753; und französ. in den Mem. de l'Ac. de Pr. 1751. p. 199; wo sich auch p. 169. dessen Harmonie entre les principes generaux de repos & de mouvem. de Mr. de Maup. und p. 246. dessen essay d'une demonstration metaphysique du pr. gen. de l'equil. befinden. Im J. 1752. gehört p. 293. hieher eine Antwort des Herrn v. M. gegen den Hrn. d'Arcy. Ant. Brugmans proeve over de waare grondwetten der beweging en rust Leid. 1753; ist gegen den Hrn. v. M. Zu einer ähnlichen Anwendung der Lehre vom Grösten und Kleinsten auf die Mechanik gehören unter andern auch Hrn. Eulers beyde Additamenta zu s. Methodo inueniendi curuas maximi minimiue proprietate gaudentes (Genf 1744); wo er im ersten gewiesen hat, wie aus Betrachtung der grösten und kleinsten, die Krüm-

mung

mung federharter Bleche (curua elastica) zu bestimmen ist, im zweyten was für eine Function bey dem Wege geworfener Körper, denen nichts wiedersteht, am größten oder am kleinsten wird.

Gründe allgemeiner Untersuchungen der Bewegung fester Körper.

216. Wie die Bewegungen eines festen Körpers von jeder gegebenen Gestalt zu bestimmen sind, hat Herr Euler decouverte d'un nouveau principe de mecanique Mem. de l'Ac. Roy. de Pr. 1750. p. 185. gewiesen, und solches sowohl in den Mem. de l'Ac. Roy. de Pr. 1758. als in seiner Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum, nach einem noch verbesserten Verfahren, vollkommener ausgeführt. Dieses Buch, wovon das Mscpt. schon 1761 fertig gewesen, da schon Pränumeration darauf angenommen worden, ist erst in der Ostermesse jetzigen Jahrs herausgekommen, und ich erhielt es, als von gegenwärtigem Werke schon alles bis auf jetzige Untersuchung abgedruckt war, die ich eben nach dem angeführten ältern Aufsatze Hrn. E. in den Schriften der Kön. preuss. Ak. vortragen wollte. Was ich dieserwegen etwa schon abgefaßt hatte, opferte ich dem Vortheile meiner Leser willig auf, und will mich in den folgenden nach der Theoria motus richten. Indessen werden mir die Schranken, die ich mir setzen muß, allzugrosse Weitläuftigkeit, auch deßwegen verbieten, weil die Untersuchungen in der Allgemeinheit, in welcher Hr. E. vorträgt, noch sehr weit von praktischen Anwendungen entfernt sind, auf

die ich hier mein Augenmerk vornähmlich gerichtet habe.

217. Herr Euler hat statt der Formeln der Zeit, der Geschwindigkeit u. s. w., die er bisher beständig gebraucht, und dadurch ihren Gebrauch fast allgemein gemacht hatte, in diesem Werke andere bequemer gefunden. Ich bin genöthiget diese neue Formeln hier beyzubringen, sowohl damit meine Leser beyderley Arten verstehen, als auch weil ich sonst die jetzigen Wahrheiten aus Hrn. E. neuer Sprache in seine alte übersetzen müßte. Der Unterschied besteht hauptsächlich darinn, daß Herr Euler die Geschwindigkeit nicht mehr durch die ihr zugehörige Höhe ausdrückt, welches ihm sonst selbst so vortheilhaft geschienen hatte, und statt der Zahl 15625 (I. Abschn. 36.) jetzt einen Buchstaben setzt; Dadurch erhalten die Formeln eine allgemeinere Richtigkeit, da diese Zahl wegen des Schwunges der Erde nicht überall einerley ist (Astron. 209.) auch vielleicht sich ändern könnte, wenn die Erde sich nicht immer in gleicher Zeit um ihre Are wälzte. Die neuen Ausdrücke lassen sich leicht folgendergestalt aus den vorigen herleiten.

Verwandlung der Formeln für die veränderte Bewegung I. Abschn. 79; u. f. in solche, die das dortige v nicht enthalten.

217. I. Weil $ddx = \frac{e.f.C}{T} . dt^2$ (daf. 74.) und $e = \frac{2.S}{C.T}$ (daf. 34.), so ist $ddx = \frac{2.S}{T^2} . f dt^2$. Man neh-

nehme für T eine Secunde = 1 an, und nenne S = g, so ist $ddx = 2gfdt^2$ (I.).

II. Ferner ist, g statt S gesetzt, aus I. Abschn. 75; $v = \frac{u^2 g}{C^2}$. Es sey w der Raum, der mit der Geschwindigkeit u in einer Secunde zurückgelegt wird, so ist $u = \frac{w.C}{2g}$ (I. Abschn. 39 u. 7.) also $v = \frac{w^2}{4g}$, $dv = \frac{w\,dw}{2g}$, und im I. Abschn. 76; $f\,dx = \frac{w\,dw}{2g}$ (II.).

III. Auch im I. Abschn. 77; statt S, T, v, ihre Werthe gesetzt $dx = w\,dt$, und $\frac{1}{m} = 2r\,g$.

IIII. Daher, diesen Werth von dx in die nächstvorhergehende Gleichung gesetzt, $f\,dt = \frac{dw}{2g}$ (III.).

V. Also auch in 86; aus der Gleichung II; nur p statt f gesetzt: $\frac{w\,dw}{2g} = p\,dx$; und $-\frac{dy}{w} = dt$.

VI. Und in 168; für die Normal- und Tangentialkraft; $2g.Nr = w^2$; $2g.T\,ds = w\,dw$.

VII. Und im II. Abschn. 2. die Schwungkraft $= \frac{w^2}{2gr}$ (hier II.).

VIII. Von einem Kreise dessen Halbmesser = 1; werde in einer Secunde, mit der Geschwindigkeit u (II.) der Bogen γ beschrieben, in eben der Zeit aber mit eben der Geschwindigkeit der Bogen w,

im Kreise dessen Halbmesser r ist, so ist $1 : r = \gamma : w$ und also $\gamma = \frac{w}{r}$, welches man die Winkelgeschwindigkeit wie I. Abschn. 212. nennen darf, mit dieser Geschwindigkeit nähmlich wird der Winkel, den γ mißt, beschrieben.

VIIII. So wird die Schwungkraft (VII.) $\frac{r\gamma^2}{2g}$.

218. Lehns. PSQ 46. F. ist ein gegebener Winkel $= \varepsilon$; Eine Linie VS; die sich nicht in seiner Ebene befindet, macht mit seinen Schenkeln, gegebene Winkel $VSP = \alpha$; $VSQ = \beta$; Man sucht $VSW = \delta$; ihre Neigung gegen die Ebene PSQ.

Aufl. I. Wenn man S als den Mittelpunct einer Kugel ansieht, und $SP = SQ = SV$ nimmt, so giebt sich ein sphärisches Dreyeck VPQ. In demselben sind die Seiten $VP = \alpha$; $VQ = \beta$; $QP = \varepsilon$; alle gegeben. Nun ist $VW = VS . \sin\delta$, $WS = VS . \cos\delta$. Und wenn VT auf SP senkrecht ist, also auch TW senkrecht auf SP steht (Geom. 46. S. 6. Zus.), so ist $VT = VS . \sin\alpha$, folglich des sphärischen Winkels P Sinus $= \frac{VW}{VT} = \frac{\sin\delta}{\sin\alpha}$. Da nun dieser Sinus aus den gegebenen Seiten gegeben ist (sphär. Trig. 8. S.) so ist $\sin\delta = \sin\alpha . \sin P$.

II. Die dortigen Schlüsse bequem hier anzuwenden dient folgende Vergleichung: Es ist

dorten	B	P	A	K	N	M
hier	P	V	Q	S	T	W

dorten

vorten	m	μ	p	π	f	φ	x	y
hier	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\beta$	$\cos\beta$	$\sin\varepsilon$	$\cos\varepsilon$	$\sin P$	$\sin\frac{1}{2}P$

III. Folglich

$$\sin\tfrac{1}{2}P^2 = \frac{\sin\frac{1}{2}(\beta+\alpha-\varepsilon).\ \sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha+\varepsilon)}{\sin\alpha.\ \sin\varepsilon}$$ woraus sich $\sin P$ und $\sin\delta$ giebt.

IIII. Oder auch $\cos P = \frac{\cos\beta - \sin\alpha.\cos\varepsilon}{\sin\varepsilon.\ \sin\alpha.}$.

219. Zus. Wenn $QSP = 90$ Gr, also $\sin\varepsilon = 1$; so wird $\cos P = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha}$, daher $\sin P = \frac{r(\sin\alpha^2 - \cos\beta^2)}{\sin\alpha}$ und $\sin\delta = r(\sin\alpha^2 - \cos\beta^2)$ und $\cos\delta = r(\cos\alpha^2 + \cos\beta^2)$.

220. Zus. Es ist klar daß in 218; I; auch $\sin\delta = \sin\beta.\sin Q$ und daß $\sin Q$ und $\cos Q$ aus $\sin P$ und $\cos P$, werden, wenn man nur β; α; statt α; β; setzt. Folglich ist in 219. auch $\sin\delta = r(\sin\beta^2 - \cos\alpha^2)$.

221. Zus. Sin $WST = \frac{WT}{SW}$; Aber $WT = VT$. $\cos P = VS.\sin\alpha.\cos P$ und $SW = VS.\cos\delta$ also $\sin WST = \frac{\sin\alpha.\cos P}{\cos\delta}$.

222. Zus. In 219. wird $\sin WST = \frac{\cos\beta}{\cos\delta} = \frac{\cos\beta}{r(\cos\alpha^2 + \cos\beta^2)} = \frac{1}{r(\frac{\cos\alpha^2}{\cos\beta^2} + 1)}$. Nun ist

der Divisor dieses Ausdrucks die Secante eines Bogens dessen Tangente $\frac{\text{col}\,\alpha}{\text{col}\,\beta}$. Wenn man also diesen Bogen $= \varphi$ nennt, so ist $\sin \text{WST} = \frac{1}{\sec \varphi}$ $= \text{col}\,\varphi$ (Trig. 4. Erkl. 5. Zus.).

223. Zus. Aus den unmittelbar gegebenen α; β; findet man φ durch die Logarithmen. Man muß nur, die Logarithmen der Tafeln zu brauchen, so verfahren, wie bey Trig. 21. S. gewiesen worden. Also findet man auch $\text{WST} = 90° - \varphi$.

224. Zus. Also ist $\text{col}\,\delta = \frac{\text{col}\,\beta}{\text{col}\,\varphi}$, welches δ durch die Logarithmen giebt. Wenn man statt $\text{col}\,\varphi$ seinen Werth aus (222) setzt, so erhält man für $\text{col}\,\delta$ auch hier den schon (219) gefundenen Werth.

225. Zus. Aus 222; findet man

$$1 - \frac{1}{\frac{\text{col}\,\alpha^2}{\text{col}\,\beta^2} + 1} \text{ oder } \sin \varphi^2 = \frac{\frac{\text{col}\,\alpha^2}{\text{col}\,\beta^2}}{\frac{\text{col}\,\alpha^2}{\text{col}\,\beta^2} + 1},$$

Daher $\sin \varphi$ oder $\text{col}\,\text{WST} = \frac{1}{r\left(1 + \frac{\text{col}\,\beta^2}{\text{col}\,\alpha^2}\right)}$

$= \frac{\text{col}\,\alpha}{r\,\text{col}\,\alpha^2 + \text{col}\,\beta^2)}$ daher aus 219; $\text{col}\,\delta$.

$\sin \varphi = \text{col}\,\alpha$.

226. Aufg.

226. Aufg. Eine Kraft = V ist nach SV 46. F. gerichtet. Man soll sie in drey Kräfte zerlegen, deren Richtungen SP; SQ; SR; alle senkrecht auf einander stehen.

Aufl. I. Man fälle VW senkrecht auf die Ebene PSQ; und nenne die Winkel wie in 218. So zerlegt sich die gegebene Kraft, in eine welche nach VW auf diese Ebene senkrecht, also $= \frac{VW}{VS}$. V = V. sin δ ist, und eine welche in dieser Ebene nach SW gerichtet, also $= \frac{SW}{VS}$. V = V. cos δ ist.

II. Die letzte Kraft zerlegt sich in eine nach SP; welche $\frac{ST}{SW}$. V. cos δ, und eine nach TW oder SQ; welche $\frac{TW}{SW}$. V. cos δ ist.

III. Weil $\frac{ST}{SW}$ = cos WST, so wird aus (222) die Kraft nach SP = γ. cos δ. sin φ = cos α. V (226). Und weil $\frac{TW}{SW}$ = sin TSW, so wird die Kraft nach SQ = V. cos δ. cos φ (222) = cos β. V (224). Eben so, wenn man VSR = 90 Gr − δ = γ setzt, ist die Kraft nach VW oder SR (I.) = V. cos γ.

IIII. Die drey Kräfte verhalten sich also wie die Cosinus der Winkel, die ihre Richtungen mit der Richtung der mittlern Kraft, die in sie zerlegt wird. Oder wenn sie P, Q, R, heissen, so ist

$$\text{col VSP} = \text{col}\alpha = \frac{P}{V};$$

$$\text{col VSQ} = \text{col}\beta = \frac{Q}{V}$$

$$\text{col VSR} = \text{col}\gamma = \frac{R}{V}$$

V. Weil $\text{col}\gamma = \sin\delta$, so ist aus 219; $\text{col}\gamma^2 = \sin\alpha^2 - \text{col}\beta^2 = 1 - \text{col}\alpha^2 - \text{col}\beta^2$; also $\text{col}\alpha^2 + \text{col}\beta^2 + \text{col}\gamma^2 = 1$; die Werthe dieser Cosinusse aus (IIII.) gesetzt, kömmt $P^2 + Q^2 + R^2 = V^2$.

VI. Bekantermassen lassen sich Bewegungen wie Kräfte zerlegen. Eine Bewegung nach SV würde sich auf die beschriebene Art, in drey Bewegungen nach SP, SQ, SR, zerlegen lassen. Indem ein Körper aus S in V kömmt, entfernet er sich von den Ebenen PSR; QSR; RSP; in der hier angenommenen Vorausetzung, daß diese drey Ebenen senkrecht auf einander stehen, um die Linien TW; TS; WV; da sich nun diese Linien gegen SV wie die Kräfte verhalten, in welche eine Kraft nach SV, die man durch V ausdrückte, zerlegt würde, so erhellt, daß wenn nun V die Geschwindigkeit bedeutete, mit der SV beschrieben würde, diese Geschwindigkeit sich in drey P, Q, R, nach den genannten drey Richtungen zerlegen liesse.

227. Aufg. Jedes gegebenen Körpers Schwerpunct zu finden.

Aufl. I. Durch eine willkührliche Stelle O, des Körpers 44. F. ziehe man ein paar wagrechte Linien OA, OB, eine senckrecht auf die andere, und OC, auf die

Ebene

Ebene BOC, folglich auf OB und OC senkrecht. So geben sich drey Ebenen die rechtwinklicht auf einander stehen AOB; BOC; COB. In Z sey ein Element des Körpers, das man dM nenne, die ganze Masse des Körpers heisse M. Man fälle von Z, ZY auf die Ebene AOB, und von Y; YZ auf OA senkrecht, wie auch ZX seyn wird (Geom. 46. S. 7. Zus.). Man nenne OX = x; XY = y; YZ = z. Die Lage des Elements Z ist durch diese drey Linien gegeben (wie in Alg. 514.).

II. I sey der gesuchte Schwerpunct, und IK, KG, IG; mit ZY; YX; ZX; parallel. Um also die Lage des Schwerpuncts zu bestimmen, wird man OG; KG; IG; suchen müssen.

III. Wenn Z sinken will, und die Linie OB unbeweglich bleiben solle, so muß sich die Ebene BOC darum, wie um eine Axe drehen. Man suche die Gewalt welche Z dazu anwenden würde, wenn sonst nichts im Körper schwer wäre; oder: das Moment von Z, für die Axe OB.

IIII. Man fälle von Z auf OB ein Perpendikel: Es sey ZT in der 45. F., die ich besonders gezeichnet habe, die 44 nicht mit allzuviel Linien zu verwirren, weil man sich die 45 leicht in die 44 gehörig hineingesetzt vorstellen kann, da der Punct T irgendwo in der Linie OB seyn muß. Diese TZ also ist als ein Arm eines Hebels anzusehen, wo T die Unterlage, an Z ein Gewicht ist, das man mit einem Perpendikel aus der Unterlage auf die Richtung der Kraft multipliciren muß, um sein Mo-

ment zu bekommen (Stat. 56.). Nun ist ZY, die Richtung der Kraft, auf die Ebene BOA, folglich auf TY in dieser Ebene, senkrecht, also das Moment = TY. dM. Eben diese TY steht aber auch senkrecht auf OB (G. 46. S. 6. Z.) und ist also = OX (G. 12. S. 3. Zus.) also das Moment (III.) = xdM.

V. Wenn die Masse in I beysammen wäre, hätte sie für die Axe OB ein Moment, das der Summe aller dieser Momente gleich wäre (Stat. 45.); al= so wäre OG. M = $\int x\,dM$; daher ist OG = $\frac{\int x\,dM}{M}$.

VI. Betrachtet man Z in so fern es die Ebene BOA nicht um OB, sondern um OA drehen wollte, so wäre der Arm des Hebels XZ; und das Moment YX. Z oder y. dM, und KG. M = $\int y\,dM$ oder KG = $\frac{\int y\,dM}{M}$.

VII. Das bisherige, stimmte mit dem Verfah= ren, wie man den Schwerpunct durch Versuche fände (Stat. 49.) so überein; Man verschöbe den Körper, bis er sich nach einer Linie, die mit OB parallel ginge, ins Gleichgewicht stellte, diese Linie wäre GK: Und nun brächte man ihn nach einer Pa= rallele mit OA ins Gleichgewicht, die ginge durch K; so hätte man zwo Schwerebenen, durch die bey= den jetzt gefundenen Linien, sie schnitten einander im Durchmesser der Schwere KI; und es bliebe also noch übrig auszumachen, wo I in ihm läge.

Zu

Zu dieser Absicht müßte man nun den Körper anders auflegen, daß OC horizontal würde.

VIII. Man lasse also alle die gezogenen Linien unter sich in ungeänderten Lagen bleiben, und stelle sich die ganze 44. F. nur so vor, als wenn die Ebene AOC horizontal wäre; und um die Axe OA gedreht werden sollte. Hier stünde also XY vertical, und Z wollte nach einer Parallele mit dieser Linie sinken; der Arm des Hebels wäre XZ; und aus X ein Perpendikel auf eine Parallele mit XY gefällt, mit YZ parallel und eben so groß; folglich das Moment $= z.\,dM$; und des Schwerpuncts Weite von der Ebene BOA; nähmlich $IK = \frac{\int z\,dM}{M}$.

VIIII. Durch die drey Weiten, OG von der Ebene BOC (V.) GK von der Ebene AOC (VI.) und IK von der Ebene AOB ist des Schwerpuncts Stelle gegeben.

228. Zus. Bey der Untersuchung des Schwerpuncts, wird die Schwere als eine beschleunigende Kraft betrachtet, die nach parallelen Richtungen mit gleicher Stärke in jedes Element des Körpers wirkte, oder: vermöge der jedes Element des Körpers eine bewegende Kraft bekömmt, die sich wie die Masse dieses Elements verhält, und wo die bewegende Kräfte aller Elemente parallele Richtungen haben. Aus dieser Voraussetzung findet man den Schwerpunct, einen Punct, in dem alle diese bewegende Kräfte vereinigt können gesetzt werden (Stat. 48.). Hiebey also wird weder eine gewisse

Stärke

Stärke der beschleunigenden Kraft der Schwere, noch eine gewisse Linie, der ihre Richtungen parallel seyn sollen, zum vorausgesetzt. Eine stärkere oder schwächere Schwere, davon im I. Abschn. III. Cap. Begriffe gegeben sind, geben bey einem Körper, einerley Schwerpunct. Der Mittelpunct einer Kugel wird ihr Schwerpunct bleiben, sie mag auf der Erde, oder auf der Sonne fallen, obgleich die Schweren nach diesen beyden Körpern sehr unterschieden sind (I. Abschn. 247.). Und, wenn ein Körper nicht schwer wäre, aber Kräfte nach horizontalen, oder gegen den Horizont unter einem gegebenen Winkel schiefen Richtungen auf die vorbeschriebene Art wirkten, so würde sich ihre Wirkung allemahl auch im Schwerpuncte vereinigen lassen, und was diesen Punct, mit der Summe aller dieser Kräfte, ihrer Richtung entgegengesetzt aufhält, den ganzen Körper aufhalten. In den Schlüssen nähmlich, durch die man den Schwerpunct bestimmt, wird nur das angenommen, daß sie parallel, nicht nothwendig, daß sie vertical sind. Wenn ein Körper längst einer schiefen Ebene hinabgeht, so läßt sich die grauitas respectiua (Stat. 102.) als eine Schwere ansehen, die mit der Ebene parallel wirkte. Wenn ein Wind horizontal weht, so wirken die solchergestalt bewegten Lufttheilchen in einen Windmühlenflügel, wie eine wagrechte Schwere in ihn wirken würde (Stat. 135.). Hieraus erhellt, daß man sich die Wirkungen solcher Kräfte allemahl im Schwerpuncte des Körpers vereinigt vorstellen kann. Wem indessen der Nahme des

Schwer=

Schwerpunctes anstössig ist, wo an die Schwere nicht gedacht wird, der kann in solchen Fällen diesen Punct den Mittelpunct der Masse oder der Trägheit (97) nennen, wie Hr. Euler Theor. mot. §. 284. u. s. w. thut.

229. Zus. Wenn sich I in der Ebene AOB befände, so wäre IK; folglich (227. VIII.) $\int z\,dM = 0$ oder wenn man jedes Element, mit seiner Entfernung von dieser Ebene multiplicirte, so müßte die Summe der Producte verschwinden, daß ist die Producte auf einer Seite der Ebene zusammen müssen soviel betragen, als die Producte auf der andern Seite zusammen. Eben so etwas folgt für die Ebenen BOC; AOC; aus 227; IIII; VI; wenn sich I in einer von ihnen befände. Ist also O der Mittelpunct der Trägheit selbst, so verschwinden alle die drey Integrale durch welche OG; GK; KI; bestimmt wurden, oder die Momente um den Punct O ringsherum heben einander auf.

230. Zus. Ein Körper, den nur eine Kraft treibt, deren Richtung durch den Mittelpunct der Trägheit geht, bekömmt nur eine fortgehende Bewegung (wie 99.), keine wälzende, und so verhält es sich also wenn in ihn Kräfte wie (228) wirken.

231. Aufg. Wenn in einen Körper Kräfte wirken, deren mittlere Richtung durch den Mittelpunct der Trägheit geht (wie 228), die Bewegung desselben zu bestimmen.

Aufl. I. Weil die Bewegung nur fortgehend ist (230), braucht man nur die Bewegung des Mittel-

telpuncts der Trägheit zu bestimmen (99), in dem man sich die Masse des Körpers und die ganze bewegende Kraft, die in ihn wirkt, vereinigt vorstellen kann (228). Die Masse soll M, die Kraft V, heissen. Wirken unterschiedliche Kräfte in den Körper, so bedeutet V ihre mittlere (Stat. 60.), von der ich annehme, ihre Richtung gehe durch den Schwerpunct. Wenn diese Kraft veränderlich ist, so bedeutet V die Grösse, die sie am Ende der Zeit t hat.

Da man also von dem ganzen Körper nur seinen Mittelpunct der Trägheit, welches noch I 44. Fig. seyn mag, zu betrachten nöthig hat, so kann man hier diese Figur folgendergestalt brauchen. O sey ein unbeweglicher Punct in dem absoluten Raume (I. Abschn. 3.), durch den die drey Linien OA, OB, OC, auf einander senkrecht stehen. Z bedeute nun nicht einen Punct des Körpers, sondern die Stelle in des Schwerpunctes Wege IZ; wo er sich am Ende der Zeit t befindet. ZY = z ist auf die Ebene BOA und YX = y auf OA senkrecht, auch OX = x.

III. Den Weg nun, den der Schwerpunct von Z aus weiter fort wirklich nimmt, zerlege man (226. VI.) in dreyerley Bewegungen (wie I. Abschn. 174; die krummlinichte Bewegung, in eine horizontale und eine verticale zerlegt wird), die erste von ihnen sey mit OA, die zweyte mit OB, die dritte mit OC parallel. Durch die Bewegung ändert nähmlich der Punct seine Lage gegen jede der drey Ebenen BOC, COA, AOB, von denen er sich,

in

in der Ordnung wie ich sie genannt habe, in der Zeit dt um dx; dy, dz, entfernt; Nähert er sich einer von diesen Ebenen, z. Ex. AOB; oder behält er noch die vorige Weite von ihr, so ist das Differential, das der Veränderung seiner Entfernung zugehörte, z. E. dz, verneint oder $=o$.

IIII. Nun zerlege man auch V in drey Kräfte, deren Richtungen mit den genannten drey Linien parallel gehen; sie sollen (226. III.) P; Q; R; heissen. Weil $\frac{P}{M}$; $\frac{Q}{M}$; $\frac{R}{M}$; beschleunigende Kräfte sind, die nach den Richtungen x; y; z; wirken, so ist, jede in (217; I.) statt f gesetzt, und die Gleichung mit M multiplicirt

$Mddx = 2gPdt^2$; $Mddy = 2gQdt^2$; $Mddz = 2gRdt^2$

wo man das Element der Zeit, für beständig annimmt.

V. Die Kräfte P, Q, R, können durch die Coordinaten, oder durch die Geschwindigkeit $\frac{ds}{dt}$, die ich v nennen will, (was in 217; II. w genannt wurde, die Verwechselung mit dem v der Formeln, aus den die neuen hergeleitet wurden, zu vermeiden) gegeben seyn; da alsdenn aus der Analysis muß gebraucht werden, was diese Gleichungen nach der Art wie die veränderlichen Grössen in ihnen vermengt sind, zu integriren u. s. w. dienlich ist.

VI. Der Weg des Mittelpunctes der Trägheit heisse s; und ds sey das Element davon, das in der

Zeit dt beschrieben wird. Man kann sich leicht überzeugen, daß es $r(dx^2 + dy^2 + dz^2)$ seyn wird. Um die Figur nicht mit mehr Linien zu verwirren, so soll IZ dieses Element bedeuten; Also sind OG, OX; GK, XY; KI, YZ; drey Paar einander unendlich naher x; y; z; da das letzte in jedem Paare um ein Differential vom ersten unterschieden ist. Eine Parallele mit GX durch K bis an XY gezogen, ist $=GX=dx$; zwischen ihr und GX ist auf YX ein Stück $=KG=y$ enthalten, und das übrige von YX ist $=dy$; also ist $KY^2=dx^2+dy^2$. Eine Linie mit KY parallel durch I bis an YZ gezogen, ist $=KY$ und zwischen ihr und KY fällt von ZY ein Stück $=IK=z$; das übrige von YZ ist also $=dz$ und IZ^2 als die Summe der Quadrate, dieses Uebrigen, und der letztgenannten Parallele, ist also $dx^2+dy^2+dz^2$.

VII. Also ist aus (V.) $v\,dv = \frac{ds\,dds}{dt^2} = \frac{dx\,ddx + dy\,ddy + dz\,ddz}{dt^2}$.

VIII. Daher aus (IIII.) $v\,dv = \frac{2g}{M}.(P\,dx + Q\,dy + R\,dz)$ welches die Differentialgleichung für die Aenderung der Geschwindigkeit ist.

VIIII. Den Weg (VI.) zu bestimmen, setze man $dy = p\,dx$; und $dz = q\,dx$; also $ds = r(1 + pp + qq)$ auch $ddy = p\,ddx + dp\,dx$; daher aus (IIII.)

die

die Werthe der zweyten Differentiale gesetzt $\frac{2gQdt^2}{M} = \frac{p.2gPdt^2}{M} + dpdx$ oder $\frac{2g}{M} dt^2$. $(Q-Pp) = dpdx$; Und eben so $ddz = qddx + dqdx$, daher wieder aus IIII; $\frac{2g}{M}.(R-Pq)dt^2 = dqdx$.

X. Die beyden Gleichungen, die rechter Hand dpdx, dqdx; stehen haben, mit einander dividirt, kömmt $\frac{Q-Pp}{R-Pp} = \frac{dp}{dq}$ oder $Qdq - Ppdq = Rdp - Pqdp$ oder $P.(qdp - pdq) + Qdq - Rdp = o$ Weil nun $p = \frac{dy}{dx}$; $q = \frac{dz}{dx}$; so ist $dp = \frac{dxddy - dyddx}{dx^2}$,

$dq = \frac{dxddz - dzddx}{dx^2}$, also $qdp = \frac{dzdxddy - dzdyddx}{dx^3}$

$pdq = \frac{dydxddz - dydzddx}{dx^3}$. Dieses giebt

$P.(dzddy - dyddz) + Q(dxddz - dzddx) + R(dyddx - dxddy) = o$, welches die Differentialgleichung für den Weg des Körpers ist.

XI. Diese Gleichung läßt sich auch so ausdrücken

$$P.dz^2.d\frac{dy}{dz} + Q.dx^2.d\frac{dz}{dx} + R.dy^2.d\frac{dx}{dy} = o,$$

wo das unveränderliche Differential dt nicht mehr vorkömmt.

232. Ich habe dieses mit als eine Probe beybringen wollen, wie Herr Euler im angef. Werke

die Bewegung der Puncte betrachtet, dergestalt nähmlich, daß untersucht wird, wie ein bewegter Punct seine Stelle in Absicht auf drey gegeneinander lothrechte unbewegliche Ebenen ändert, und sein Weg in drey mit drey gegebenen Linien parallele Wege zerlegt wird. Bewegt sich der Punct immer in einer Ebene, so zerlegt man seinen Weg in zweene, die rechtwinklichten Coordinaten parallel sind, wovon ein Exempel schon 231; III. angeführt worden.

Von der drehenden Bewegung.

233. Wenn sich ein Körper um eine feste Stelle drehen muß, wie in gegenwärtigem Abschnitte auf verschiedene Art betrachtet worden, so können nicht alle Theile gleich geschwinde gehen, vermöge ihres Zusammenhanges hindert oder befördert jeder die Bewegung, die der andere ohne diesen Zusammenhang hätte, und so muß die Lage der Theile, und was in jedem besonders vorgeht, betrachtet werden, wovon die Berechungen des Mittelpunctes des Schwunges, und der Ueberwucht Proben sind. Ein Körper kann aber zugleich auch im Ganzen seine Stelle ändern, indem seine Theile sich nicht nach parallelen Linien bewegen, wie eine Kugel, die im Fortlaufen sich wälzt. Die unterschiedenen Bewegungen, die hiebey vorkommen, lassen sich folgendergestalt aus einander setzen. Man kann zuerst allein betrachten, was für einen Weg des Körpers Schwerpunct, oder welches einerley ist, sein Mittelpunct der Trägheit, nimmt, und mit was für einer Geschwin-

schwindigkeit er geht: dieß kann man des Körpers fortgehende Bewegung, sein Fortrücken (motum progressiuum) nennen, und sie nach der Anleitung betrachten, die für bewegte Puncte bekannt ist, wie 231. geschehen ist. Wenn sich nun auserdem nicht alle Theile des Körpers nach parallelen Linien bewegen, das ist, wenn der Körper sich drehr, so stelle man sich vor, das nur erwähnte Fortrücken werde gehemmt, der Schwerpunct bleibe stehen, und untersuche alsdenn, wie sich der Körper um diesen stillstehenden Schwerpunct drehen wird. Den Schwerpunct kann man sich leicht als ruhend vorstellen, wenn man annimmt, er befinde sich in einer Ebene, die mit eben der Geschwindigkeit zurückgeführt wird, mit der er vorwärts geht. Hat man also jede Bewegung, die drehende, und die fortrückende einzeln betrachtet, so kann man sie nun mit einander verbinden.

234. Wenn beym Drehen des Körpers, nicht nur sein Schwerpunct, sondern auch eine gerade Linie, sich nicht mit dreht, also der Körper sich um dieselbe dreht, so heißt diese Linie eine Axe; die Stellen wo sie des Körpers äusere Fläche schneidet, können Pole heissen, und diese Axe, um welche sich der Körper dreht, kann immer einerley bleiben, oder sich ändern. Man wird sich dieses leicht durch die Vorstellung einer Kugel, die während ihres Fortlaufens sich wälzt, erläutern können.

235. Aufg. Ein Körper soll sich gleichförmig um eine unbewegte Axe drehen. Man verlangt zu wis-

sen, was für Kräfte in die Axe würken, solche aus ihrer Lage zu bringen, und was für Kräfte also müssen angewandt werden, die Axe in ihrer Steile zu erhalten.

Aufl. EC 25. F. sey die Axe; und in T ein Element des Körpers = dM; von dem ein Perpendikel auf die Axe gefällt, TB = x sey. Man begreift, daß sich dieses Element in einem Kreise bewegen wird, dessen Halbmesser TB ist. Wäre es ganz allein, so würde es die Axe nach der Richtung TB, mit der Schwungkraft ziehen, die ihm seine Geschwindigkeit gibt, es ist nähmlich offenbahr einerley, ob TB ein Faden wäre, vermittelst dessen das Element und die Axe zusammenhingen, oder ob die Festigkeit des Körper, beyde verbindet. So ist in 217. VIIII; r = x; und des Elements bewegende Schwungkraft (I. Abschn. 49.) $\frac{\gamma \cdot \gamma}{2g} . x\,dM.$

Wenn man sich also den Körper in lauter solche Elemente getheilt vorstellt, und jedes Schwungkraft auf diese Art bestimmt, so giebt aller Summe, die Gewalt, welche die Axe leidet, und die also gegenseitig muß angewandt werden, sie in ihrer Stelle zu erhalten. Die Winkelgeschwindigkeit wird für alle Elemente gleich angenommen, wenn sich der Körper gleichförmig dreht; denn alle Elemente müssen ihre Kreise in einer Zeit durchlaufen, daher freylich die, welche weiter von der Axe entfernt sind, sich schneller bewegen müssen, wie, wenn sich die Erde um ihre Axe dreht, ein Punct im Aequator

schneller

schneller geht, als einer im Polarkreise. Hätte ein Element mehr Geschwindigkeit als das andere, so würde es wegen der Festigkeit des Körpers, des andern Bewegung beschleunigen, so wie es selbst von dem andern gehindert werden würde. Bey diesen Wirkungen der Elemente in einander, könnte sich der Körper nicht gleichförmig drehen. Sie hören gegentheils auf, wenn er sich gleichförmig dreht, und jedes Element beschreibt da seinen Kreis eben so, als wenn es allein ohne die übrigen vorhanden wäre, wie bey einer blos fortgehenden Bewegung (99) jedes Element in seiner Parallele, so geht, als ob es allein da wäre.

236. Zus. Bey diesem gleichförmigen Drehen bleibt jedes Elements Schwungkraft ungeändert, die Richtung derselben aber, welche stets nach dem Elemente zugeht, ändert sich beständig, wie sich der Halbmesser des Kreises, den das Element beschreibt, um seinen Mittelpunct dreht.

237. Zus. Die völlige Gewalt zu finden, welche die Stelle B der Axe von allen Elementen des Körpers ausübt, findet sich so: Man stelle sich einen Schnitt des Körpers durch B senkrecht auf die Axe EF vor. Jedes der Elemente, die an denselben gränzen, übt in B eine Gewalt wie (235) aus: Alle diese Kräfte bringe man in eine zusammen, so hat man das verlangte. Folgendes wird dieses erläutern.

238. Aufg. Eine sehr dünne Scheibe, deren Masse = M, soll sich um eine Axe drehen, die senk-

recht auf sie steht; Man verlangt die Gewalt welche die Axe leidet.

Aufl. DBF 26. F. soll die Scheibe, und CG die Axe seyn, welche bey C durch die Scheibe geht. In Q sey ein Element der Scheibe, und CQ = r; also desselben Schwungkraft $\frac{\gamma\gamma . r . dM}{2g}$. Man ziehe in der Ebene der Scheibe ein paar Linien CE, CH, senkrecht auf einander, die unbeweglich liegen bleiben, indem sich die Scheibe dreht; CQ aber dreht sich; Von einer unbestimmten Stelle, die Q beym Drehen bekömmt, fälle man auf CE das Perpendikel QP = y; und nenne CP = x, so zerlegt sich die Schwungkraft in zwo Kräfte, davon eine nach CE gerichtet $= \frac{CP}{CQ}$. die Schwungkraft $= \frac{\gamma\gamma . x . dM}{2.g}$ die andere nach PM mit CH paallel gerichtet; $\frac{PQ}{CQ}$. Schwungkraft $= \frac{\gamma . \gamma . y . dM}{2.g}$ seyn wird. Was man nun mit Q gemacht hat, mache man in dem Augenblicke, da Q seine vorhin erwähnte unbestimmte Stelle einnimmt, mit jedem andern Elemente der Scheibe. So geben alle zusammen eine Kraft $= \frac{\gamma . \gamma}{2.g}$. fxdM nach CE; und eine $= \frac{\gamma . \gamma}{2.g}$ fydM nach CH.

Diese beyden Integrale geben sich durch den Mittelpunct der Trägheit oder der Schwere (228). Er sey in O; und von CE um die Weite OS, von CH

um

um die Weite CS entfernt, so ist fydM = OS. M; fxdM = CS. M, wie aus den Methoden den Schwerpunct zu finden An. Un. 637. leicht erhellt. Also ist $\frac{\gamma \cdot \gamma}{2 \cdot g}$. OS. M die Kraft nach CH und $\frac{\gamma\gamma}{2g}$. CS. M die nach CE; Wenn man sich also CO gezogen vorstellt, so entsteht aus den beyden Kräften eine $= \frac{\gamma \cdot \gamma}{2 \cdot g}$. CO. M nach CO; mit welcher C von der drehenden Scheibe gezogen wird.

239. Zus. Diese Kraft ist nach dem Schwerpuncte gerichtet, und verhält sich wie desselben Weite vom Mittelpuncte des Drehens C. Sie verschwindet also nur alsdenn, wenn sich die Scheibe um ihren Schwerpunct dreht. In jedem andern Falle, leidet die Axe eine Gewalt, der man eine gleiche entgegensetzen muß, wenn sich die Axe nicht verrücken soll. Diese Gewalt wird in gleicher Stärke rings um die Axe herum angewandt, weil sich der Scheibe Schwerpunct, in unveränderter Entfernung rings um die Axe bewegt, daher muß die Axe nach allen Seiten rings herum gleich fest gehalten werden, wenn sie nicht weichen soll. Diese Gewalt ist endlich so groß, als diejenige seyn würde, welche die Masse der Scheibe im Schwerpuncte vereinigt, und mit eben der Winkelgeschwindigkeit gedreht, ausübte. Denn dieser Masse Schwungkraft wäre $\frac{\gamma \cdot \gamma}{2 \cdot g}$. CO. M.

240. Bey dieser Probe, wie das Drehen betrachtet wird, muß ich es hier bewenden lassen, weil allgemeinere Untersuchungen, dergleichen Euler Theor. mot. §. 338. sqq. giebt, mir hier zu weitläuftig werden.

Vom Momente der Trägheit.

241. Wenn ein Körper sich um eine Axe z. E. OA; 44. F. drehen kann, und sein Element dM in Z; um die Weite ZX = r; von dieser Axe entfernt ist, so ist desselben Moment der Trägheit $r^2 dM$ (3). Bedeutet also $\int r^2 dM$ die Summe aller solcher Producte durch den ganzen Körper, so ist solches das Moment der Trägheit des ganzen Körpers. Diese Summe ist nicht als was Veränderliches, sondern als eine beständige Grösse anzusehen, die durch die gänzliche Gestalt und Beschaffenheit des Körpers bestimmt wird.

242. Man setze, sich die folgende Vorstellung zu erleichtern, die Masse des Körpers sey in lauter gleiche dM eingetheilt, deren eines die Entfernung r, das zweyte R, das dritte ϱ u. s. w. von der Axe habe; man setze die Summe aller dieser Momente $= kk.M$ wo k eine unveränderliche Linie bedeuten soll, so ist $(r^2 + R^2 + \varrho^2 \ldots).dM = k^2 M$ und $dM = \frac{k^2}{r^2 + R^2 + \varrho^2 \ldots.}.M$ Es ist klar, daß der Nenner des in M multiplicirten Bruches, unzählich viel Quadrate enthält, und also durch diese Multiplication

cation ein unendlich kleines Stück von M wie gehörig, herauskömmt; folglich ist diese Voraussetzung verstattet, und man kann das Moment des ganzen Körpers oder $\int r^2 dM = k^2 M$ setzen. Diese Summe der Momente ist allezeit bejaht, weil jedes Element, und jedes Quadrat seiner Entfernung bejaht ist, auch wächst sie mit der Masse des Körpers.

243. Aufg. Wenn das Moment der Trägheit eines Körpers für die Axe OA, gegeben ist, dasselbe für die Axe oa zu finden, die mit jener in der Ebene BOA parallel geht, und um die Weite c von ihr entfernt ist.

Aufl. Die Figur wird übrigens verstanden wie in 227; I; II; und BO, KG, YX, schneiden verlängert die neue Axe in o, g, x, so sind $Oo = Gg = Xx = c$; $ox = x$; $xY = y + c$; und $\int r^2 dM$ oder $\int (z^2 + y^2) dM$, das gegebene Moment des Körpers $= k^2 M$; In Absicht der neuen Axe, hat das Element in Z, zum Momente der Trägheit $Zx^2 . dM = (z^2 + (c+y)^2) . dM$, und die Summe hievon ist das Moment der Trägheit des Körpers für die neue Axe. Sie ist $\int (z^2 + y^2 + 2cy + c^2) dM = k^2 M + \int c^2 dM + \int 2cy dM$. Aber $\int c^2 dM = c^2 M$; und $\int y dM = M . GK$ (227; VI.); folglich dieses Moment $= (k^2 + c^2 + 2c . GK) . M = (k^2 + gK^2 - GK^2) . M$ weil $c^2 + 2c . GK = (c + GK)^2 - GK^2 = gK^2 - GK^2$.

244. Zus. Weil $gK^2 = gI^2 - IK^2$ und $GK^2 = GI^2 - IK^2$, so ist das neue Moment auch $(k^2 + gI^2 - GI^2) . M$ und also grösser oder kleiner als das alte, nachdem der Mittelpunct der Trägheit I; von der

neuen

neuen Axe mehr oder weniger entfernt ist, als von der alten.

245. Zus. Wenn Gl=o wäre, oder, die alte Axe durch den Mittelpunct der Trägheit ginge, und für sie das Moment Mk^2 wäre, so wäre es für die neue $(k^2+gl^2).M$ also grösser. Daher giebt unter unzählich viel parallelen Axen, diejenige das kleinste Moment, die durch den Mittelpunct der Trägheit geht.

246. Zus. Wenn man das Moment für eine Axe durch den Mittelpunct der Trägheit hat, so hat man es für solche, die mit ihr parallel gehen. Daher darf man nur die Momente für Axen durch den Mittelpunct der Trägheit suchen. Da aber dieser Axen unzählich viel seyn können, so wird jede wohl ein ander Moment haben, und weil für keine das Moment unendlich werden oder verschwinden kann, so wird es wohl unter diesen Axen welche geben, deren Moment ein grösstes oder kleinstes ist, und es ist der Mühe werth darüber einige Untersuchungen anzustellen.

247. Aufg. Das Moment der Trägheit eines Körpers in Absicht auf eine Axe zu finden, die durch den Mittelpunct der Trägheit geht.

Aufl. I. In der 47. F. sey I der Mittelpunct der Trägheit, durch ihn gehen IB, IA, IC, auf einander senkrecht, und von Z, der Stelle eines Elements des Körpers sey ZY auf die Ebene BIA, YX auf IA senkrecht, und IX=x; XY=y; YZ=z; das Moment der Trägheit, in Absicht auf eine

der

der drey Linien IA, IB, IC, lieſſe ſich nach Anleitung 241. u. f. finden: Hier aber verlangt man das Moment der Trägheit in Abſicht auf eine andere Axe IG.

II. Man lege durch IC, und IG eine Ebene, die alſo auf AIB ſenkrecht ſteht (Geom. 47. S.), ſie ſchneide dieſe letztgenannte Ebene in IF; weil die Lage der Linie IG gegen die vorhin angenommenen Linien und Ebenen, gegeben ſeyn muß, ſo iſt auch ihr Neigungswinkel gegen die Ebene BIA gegeben. Er iſt FIG = ⊙; Man vergleiche ferner die 47. und 46. Fig. mit einander, ſo iſt folgendes in beyden einerley

47. F.	I	IB	IA	IG	IF	FIG	FIA
46. F.	S	SQ	SP	SV	SW	WSV	WST

Daher weiß man aus 222; auch den Winkel FIA, der hier η heiſſen ſoll.

III. Man fälle von Y das Perpendikel YX, auf IF; und nehme als zweyte Coordinaten $IX_2 = x_2$; $X_2Y = y_2$; $YZ = z_2 = z$ an. Man bezeichnet hier nähmlich die zweyten Coordinaten mit den Buchſtaben der alten, nur mit einem beygeſetzten Unterſcheidungszeichen, wie dergleichen bey auf einander folgenden Gliedern einer Reihe in Anal. endl. Gr. 724; II; u. ſ. w. geſchehen iſt. Insgemein wird dieſes Unterſcheidungszeichen rechter Hand oben an die Buchſtaben geſetzt; weil es da dem Setzer mehr Beſchwerung macht, und auch leicht mit einem Exponenten verwechſelt werden kann, ſetze ich es lieber darneben: Und nehme eine Zifer, welche die

zweyten

zweyten gleich andeutet, statt eines einzelnen Strichs. Die Ordinate YZ ist zwar beydemahl einerley, sie kann aber hier ein besonderes Zeichen erfodern, weil man zu bemerken nöthig hat, ob diese Linie unter den drey ersten Coordinaten, oder unter den drey zweyten betrachtet wird.

IIII. Die Vergleichung zwischen den zweyten Coordinaten und den ersten zu finden, dienet folgendes: Wenn IF und YX einander in O schneiden, so ist x_2 oder $IX_2 = IO + OX_2$; aber wegen der Verticalwinkel bey O, und der rechten bey X und X_2 ist $XYX_2 = \eta$; Also $\cos\eta = \frac{x}{IO}$ daher $IO = \frac{x}{\cos\eta}$ und $OX_2 = YO.\sin\eta$ auch $OX = x.\tang\eta$ daher $YO = y - x.\tang\eta$ und $x_2 = \frac{x}{\cos\eta} + y.\sin\eta - x.\tang\eta.$

$$\sin\eta = y.\sin\eta + x.\left(\frac{1-\sin\eta^2}{\cos\eta}\right) x.\cos\eta + y.\sin\eta.$$

V. $YX_2 = y_2 = \cos\eta.\ YO = y.\cos\eta - x.\tang\eta.$ $\cos\eta = y.\cos\eta - x.\sin\eta.$

VI. Endlich ist wie schon erwähnt $z_2 = z.$

VII. Weil die Ebene CIF, senkrecht auf BIA steht (I.), so ist YX senkrecht auf die Ebene CIF (Geom. 47. S. 1. Zus.) in dieser letzten Ebene ist auch IG.

VIII. Man stelle sich dritte Coordinaten vor, die sich auf IG, wie die zweyten auf IF beziehen. Dieses geschieht folgendergestalt: Man fälle von Z auf die Ebene CIF ein Perpendikel, dieses ist mit YO pa=

parallel (VII. und Geom. 46. S.) und daher in der Ebene durch OYZ; die auf AIB senkrecht steht (G. 47. S.) und daher CIF in einer Linie schneidet, die auch senkrecht auf AIB steht (G. 47. S.), folglich mit YZ parallel ist (G. 46. S.); also sind YX, und das Perpendikel von Z auf die Ebene CIF, Parallelen zwischen Parallelen, folglich gleich.

VIIII. Die Parallelen, zwischen denen die nur genannten Parallelen enthalten sind, sind als Parallelen zwischen Parallelen auch gleich; Eine ist $ZY = z = z_2$; die andere, weil sie in der Ebenen ZYX_2 und FIG, Durchschnitte liegt, geht von der Stelle, wo das Perpendikel von Z in die Ebene FIG trifft, bis an X_2. Man kann also die Stelle Z auch so betrachten, daß sie durch drey auf einander senkrechte Coordinaten bestimmt wird, von denen die x_2, und z_2 in der Ebene FIG liegen, und y_2 auf diese Ebene senkrecht steht. Hier bedeutet also y_2 die Entfernung des Punctes Z von der Ebene FIG, wie vorhin z_2 seine Entfernung von der Ebene AIF bedeutete; Und wie vorhin die beyden Coordinaten x_2, y_2, in der Ebene AIF senkrecht auf einander standen, so stehen jetzo die beyden Coordinaten x_2, z_2, in der Ebene FIG senkrecht auf einander, daß also nun die Ordnung der Buchstaben x, z, y, ist, wie sie vorhin x, y, z, war.

X. In dieser Ordnung nun lassen sich die dritten Coordinaten bequem folgendergestalt mit den zweyten vergleichen. Von der Stelle, wo das Perpendikel von Z in FIG trifft, fälle man auf IG ein Perpendikel,

pendikel, welches zwischen sich und I, auf IG ein Stück abschneide, das man xz nenne. Dieses abgeschnittene Stück, und das Perpendikel, das es abschneidet, liegen beyde in der Ebene FIG, in der auch x2, z2, liegen (VIIII.); Man nenne also dieses Perpendikel z3; das Perpendikel von Z auf die Ebene FIG aber, oder des Punctes Z Weite von dieser Ebene nenne man y3 wie eben diese Weite auch vorhin (VIIII.) y2 hiesse.

XI. Nun wurden in IIII; x2, y2, aus x, y, vermittelst folgender Betrachtung hergeleitet: x ward auf IA genommen, und x2 auf eine Linie IF, die mit IA den Winkel η machte, y, und y2, waren Perpendikel darauf, aus dem Puncte der Ebene AIF, in den ein Perpendikel von Z auf diese Ebene trifft. Hiemit vergleiche man nun, was VIII..X. vorkömmt; x2 wird auf IF genommen, und x3 auf einer Linie IG, die mit IF den Winkel Θ macht (X.), z2, und z3, sind Perpendikel darauf, aus dem Puncte der Ebene FIG, in den ein Perpendikel von Z auf diese Ebene trifft (X; VIIII.). Also muß man x3, z3, durch x2, z2, auszudrücken, das thun, was man that x2, y2, durch x, y, auszudrücken, nur daß statt η hier θ kömmt.

XII. Daher ist aus (IIII) $x3 = x2.\cos\theta + z2.\sin\theta$.

XIII. Und aus (V) $z3 = z2.\cos\theta - x2.\sin\theta$.

XIIII. Endlich schon aus X; $y3 = y2$.

XV. Aus diesen nun gefundenen Ausdrückungen für die dritten Coordinaten, schaffe man vermöge IIII; V; VI; den zweyten weg; so ist

$x3 = x$.

$x_3 = x.\ \cos\eta.\ \cos\theta + y.\ \sin\eta.\ \cos\theta + z.\ \sin\theta$

$y_3 = y.\ \cos\eta - x.\ \sin\eta$

$z_3 = z.\ \cos\theta - x.\ \cos\eta.\ \sin\theta - y.\ \sin\eta.\ \sin\theta$

Die zweyten Coordinaten dienten nähmlich nur zu einem Mittel, die dritten mit den ersten zu vergleichen, welches eigentlich verlangt ward.

XVI. Wenn man sich aus 241. erinnert, wie daselbst des Punctes Z Entfernung von der Axe OA 44. F. gefunden worden, so wird man aus (XI.) leicht einsehen, daß die Weite eben dieses Punctes von der Axe IG zu suchen, folgende Vergleichungen anzustellen sind

44. Fig.	Ebene OXY	OX	XY	YZ
hier	Ebene FIG	x_3	z_3	y_3

Folglich ist das Quadrat der Weite des Punctes Z, von der Axe IC; die Summe der beyden Quadrate von y_3, und z_3; welche man aus XV. findet.

Von diesen beyden Quadraten ist

das erste $y^2.\ \cos\eta^2 - 2xy.\ \cos\eta.\ \sin\eta + x^2.\ \sin\eta^2$

das zweyte $y^2.\ \sin\eta^2.\ \sin\theta^2 + 2xy.\ \cos\eta.\ \sin\eta.\ \sin\theta^2$
$+ x^2.\ \cos\eta^2.\ \sin\theta^2 - 2yz.\ \cos\theta.\ \sin\theta.\ \sin\eta - 2xz.$
$\cos\theta.\ \sin\theta.\ \cos\eta + z^2.\ \cos\theta^2$

Jedes Glied dieser beyden Quadrate mit dM multiplicirt, und die Summe dieser Producte für den ganzen Körper gefunden, gibt das Moment der Trägheit des ganzen Körpers für die Axe IG (242).

XVII. Es sey für den ganzen Körper

$$\int xx\,dM = A;\quad \int yy\,dM = B,\quad \int zz\,dM = C$$
$$\int xy\,dM = D;\quad \int xz\,dM = E;\quad \int yz\,dM = F$$

so ist das nur erwähnte Moment der Trägheit

$$A.(\sin\eta^2 + \cos\eta^2.\sin\theta^2) + B(\cos\eta^2 + \sin\eta^2.\sin\theta^2)$$
$$+ C.\cos\theta^2 - 2D.\sin\eta.\cos\eta.\cos\theta^2 - 2E.\cos\eta.$$
$$\sin\theta.\cos\theta - 2F.\sin\eta.\sin\theta.\cos\theta.$$

XVIII. A, B, C, sind wegen der Quadrate, die sie enthalten, nothwendig bejaht; D, E, F, können nach Beschaffenheit des Körpers auch verneint seyn.

249. Zus. Wenn IG mit IA zusammen fällt, so verschwinden beyde Winkel (247; II.) also auch ihre Sinus; aber ihre Cosinus werden $= 1$; Daher wird das Moment der Trägheit für die Axe IA; $B + C$; Fällt IG auf IB; so wird $\theta = o$, aber $\eta = 90$ Gr; also $\sin\theta = o$, $\cos\theta = 1$; $\sin\eta = 1$, $\cos\eta = o$; und das Moment für die Axe IB; $A + C$; Fällt IG auf IC, so wird $\theta = 90$ Gr; $\eta = o$ also $\sin\theta = 1$; $\cos\theta = o$; $\sin\eta = o$; $\cos\eta = 1$ und das Moment für die Axe IC; $A + B$; Wenn man also diese drey Momente anders woher weiß, so findet man daraus A, B, C.

250. Aufg. Wenn IG die Axe bedeutet, für welche das Moment der Trägheit ein größtes oder kleinstes ist, die Lage derselben zu finden.

Aufl. I. Hier ist die Frage die beyden Winkel zu finden. Weil nun jeder sich ohne den andern verändern kann; so setze man in dem Ausdrucke des Moments der Trägheit (247. XVII.) erst η, allein, denn θ allein veränderlich, und das jedesmahlige Differential $= o$.

II. Bey der ersten Voraussetzung muß man sich erinnern, daß $d \sin \eta = \cos \eta . d\eta$ und $d \cos \eta = -\sin \eta . d\eta$. (Anal. Unendl. 281. und 296.). Dieses dient die beyden Differentiale des Sinus und des Cosinus durch das einzige des Winkels auszudrücken. So ist z. E. das Differential dessen was in A multiplicirt ist: $2 \sin \eta . d \sin \eta + \sin \theta^2 . 2 . \cos \eta . d \cos \eta = 2 \sin \eta . \cos \eta . d\eta - 2 . \sin \theta^2 . \cos \eta . \sin \eta . d\eta = 2 . \sin \eta . \cos \eta . \cos \theta^2 . d\eta$.

III. Wenn man so durchgängig verfährt, das Differential $= o$ setzt, und denn mit $-2 \cos \theta . d\eta$ dividirt, so kömmt

$$-(A-B) . \sin \eta . \cos \eta . \cos \theta + D . (\cos \eta^2 - \sin \eta^2) . \cos \theta - E . \sin \eta . \sin \theta + F . \cos \eta . \sin \theta = o$$

Daraus wird, die beyden letzten Glieder auf die andere Seite gebracht, und gehörig dividirt

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} \text{ oder } \tang \theta = \frac{(B-A) . \sin \eta . \cos \eta + D(\cos \eta^2 - \sin \eta^2)}{E . \sin \eta - F . \cos \eta}$$

welches ich $\frac{m}{n}$ nennen will, da m den Zähler, und n den Nenner bedeutet.

IIII. Wenn man nur θ veränderlich setzt, und eben so die Differentiale der Sinusse und Cosinusse durch des Winkels seines ausdrücket, damit man, wenn das Differential des Moments der Trägheit $= o$ gesetzt wird, durch das Differential des Winkels dividiren kann, so erhält man:

$$2A.\cos\eta^2.\sin\theta.\cos\theta + 2B\,\sin\eta^2.\sin\theta.\cos\theta - 2C\sin\theta.\cos\theta + 4D.\sin\eta.\cos\eta.\sin\theta.\cos\theta - 2E.\cos\eta.(\cos\theta^2 - \sin\theta^2) - 2F\sin\eta.(\cos\theta^2 - \sin\theta^2) = o$$

Dieses läßt sich aus Trigon. 19. S. 5. Zus. folgendergestalt ausdrücken

$$A.\cos\eta^2.\sin 2\theta + B.\sin\eta^2.\sin 2\theta - C.\sin 2\theta + 2D.\sin\eta.\cos\eta.\sin 2\theta - 2E.\cos\eta.\cos 2\theta - 2F.\sin\eta.\cos 2\theta = o$$

Wiederum die beyden letzten Glieder auf die andere Seite gebracht, und gehörig dividirt, giebt

$$\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} \text{ oder } \operatorname{tang} 2\theta = \frac{2E.\cos\eta + 2F.\sin\eta}{A.\cos\eta^2 + B.\sin\eta^2 - C + 2D.\sin\eta.\cos\eta}$$

V. Aus (II.) findet man $\frac{2.\operatorname{tang}\theta}{1-\operatorname{tang}\theta^2}$ oder (Trig. 19. S. 6. Zus.) $\operatorname{tang} 2\theta = \frac{2mn}{n^2-m^2}$.

VI. Beyde Werthe dieser Tangente IIII; V; sind nun gleich zu setzen. Wenn man durch die Multiplication jedes Zählers mit dem andern Nenner aus der herauskommenden Gleichung die Gestalt der Brüche wegschafft, und auf der linken Seite des

Gleich-

Gleichheitszeichens nur was in nn multiplicirt ist, stehen läßt, so hat man

$$(E.\cos\eta + F\sin\eta).n^2 = E.(\cos\eta + F.\sin\eta).m^2 + mn.$$
$$(A.\cos\eta^2 + B\sin\eta^2 - C + 2D.\sin\eta.\cos\eta)$$
$$= m.\left\{\begin{array}{c}(E.\cos\eta + F.\sin\eta).m \\ + n.A.\cos\eta^2 + B\sin\eta^2 - C + 2D.\sin\eta.\cos\eta\end{array}\right\}$$

welches ich $m.(p+q)$ nennen will.

VII. Nun betrachte man besonders die beyden Grössen p, und q; Man setze in der ersten statt m, in der zweyten statt n, ihre Werthe (III.), und multiplicire wirklich, rechne alsdenn zusammen, was in beyden in E, und in F, multiplicirt ist, wobey man bemerken muß, daß die Quadrate des Sinus und des Cosinus zusammen $=1$ sind, so findet man

$$p+q = E.(B\sin\eta - (C\sin\eta + D.\cos\eta) - F.(A.\cos\eta - C.\cos\eta + D.\sin\eta).$$

VIII. Nun kann man statt m auch seinen Wehrt setzen, und so $m.(p+q)$ ausdrücken, auch in dem linken Theile der Gleichung statt nn seinen Wehrt setzen. In der Gleichung, welche solchergestalt herauskömmt, würden der Sinus und der Cosinus in jedem Gliede zusammen drey Abmessungen ausmachen, wenn man wirklich multiplicirte. Ehe man aber dieses thut, setze man überall $t.\cos\eta$ statt $\sin\eta$ wo t des Winkels η Tangente bedeutet, so wird man $\cos\eta$ gar aus der Gleichung wegschaffen können, und sie wird sich in folgende verwandeln:

$$(E+Ft)(F-Et)^2 = (D+(B-A).t-Dt^2).$$
$$(D.E-A.F+C.F+(B.E-C.E-D.F)t)$$

welche geordnet folgende giebt:

$$o = E.F.F-D.D.E+(A-C).D.F$$
$$+t.(F^3-2E.E.F+D.D.F+(A-2B+C).D.E$$
$$-(A-B).(A-C).F)$$
$$+t^2.(E^3-2.E.E.F+D.D.E$$
$$+(B-2A+C).D.F+(A-B).(B-C).E)$$
$$+t^3.(E.E.F-D.D.F+(B-C).D.E).$$

VIIII. Liesse sich aus dieser cubischen Gleichung t finden, so hätte man den Winkel η; und also auch vermöge (III.) den Winkel θ, und beyde zusammen gäben die Lage der Axe, für welche das Moment der Trägheit ein gröſstes oder kleinstes ist.

X. Aus III. würde auch (Trig. 19. S. 5. Zus.)

$$\text{tang}\,\theta = \frac{\frac{1}{2}(B-A)\,\text{sin}\,2\eta + D.\,\text{cos}\,2\eta}{E.\,\text{sin}\,\eta - F.\,\text{cos}\,\eta}.$$

251. Zus. Die cubische Gleichung (250. VIII) hat zum wenigsten eine mögliche Wurzel. Es giebt also wenigstens eine solche Axe wie gesucht wird.

252. Lehns. Aber ein Gröſstes muß nothwendig zwischen zween verschwindende Wehrte der veränderlichen Gröſse oder zwischen einen verschwindenden und ein Kleinstes, oder zwischen zwey Kleinste fallen; Und ein Kleinstes liegt, wenn es bejaht ist, allemahl

mahl zwischen zwey Grösten, ist es eine verneinte grösste Grösse, die als ein Kleinstes angesehen wird (An. Un. 253.), so kann es zwischen zween verschwindenden Wehrten, oder zwischen einem solchen und einer verneinten Grösse, die ein Kleinstes (also unter den verneinten Grössen ein Grösstes) ist, oder zwischen zwo solchen Grössen liegen. Alles dieses ist aus An. Un. 153. klar, und lässt sich durch die daselbst 163. u. f. betrachteten Linien erläutern.

253. Zus. Nun kann das Moment der Trägheit nicht verschwinden noch verneint werden, folglich liegt das Grösste oder Kleinste, das der Axe 251. zugehört, zwischen zwey kleinsten oder größten; die also den beyden andern Axen zugehören. Es muß also drey solche Axen geben, und die cubische Gleichung muß drey mögliche Wurzeln haben, welches man sonst aus ihrer Betrachtung selbst schwerlich herleiten würde.

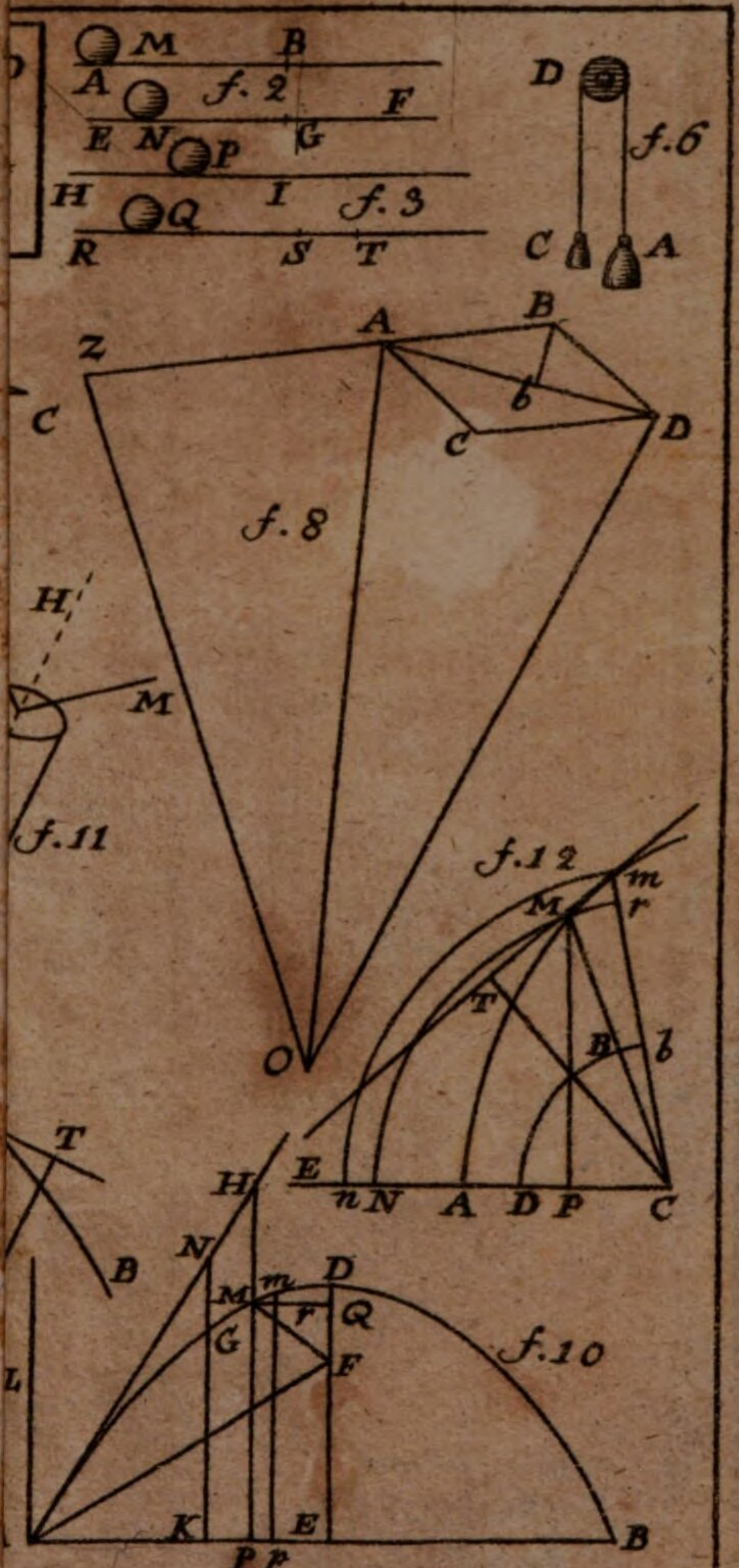
254. Man heißt diese drey Axen, Hauptaxen. Man kann zeigen, wie alle drey gefunden werden, wenn man eine weiß; daß sie senkrecht auf einander stehen, u. s. w. Sie haben unterschiedene merkwürdige Eigenschaften, besonders beym Drehen der Körper. Wenn sich nähmlich ein Körper um eine solche Axe dreht, so leidet sie dadurch keine Gewalt, und bleibt daher ruhig, ohne daß sie von einer äussern Kraft gehalten würde, daher nennt man sie auch axes gyrationis liberos. Daß es drey solche

Axen

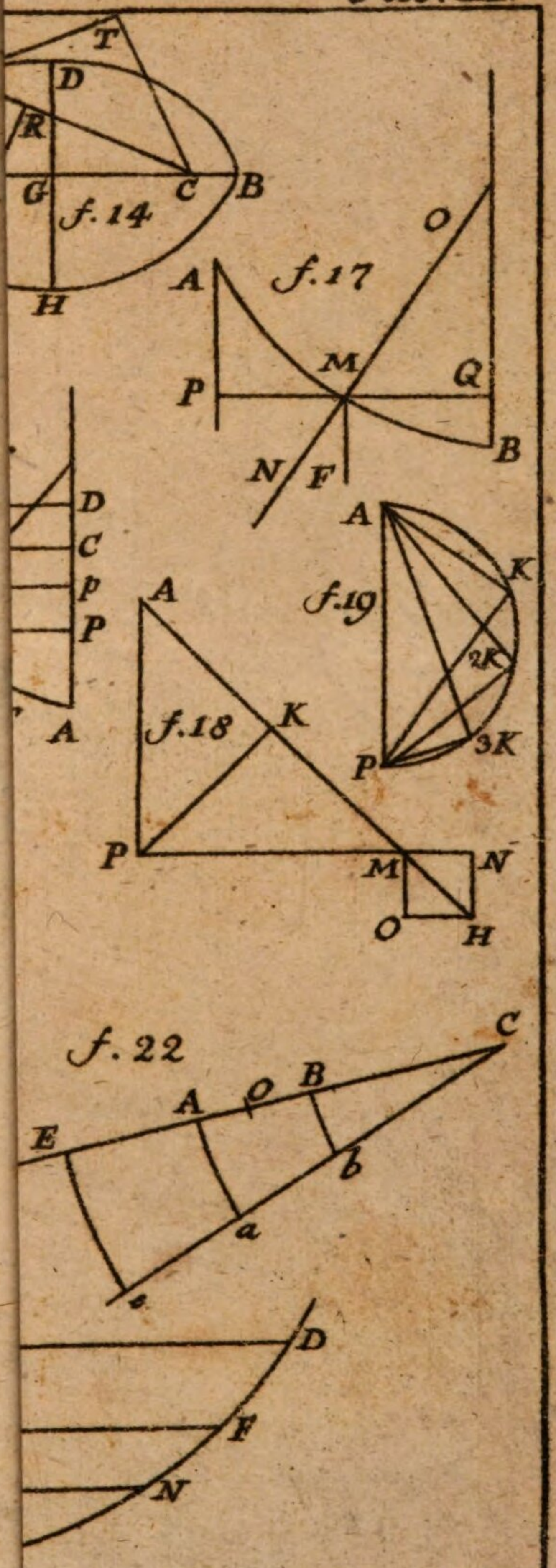
Axen in jedem Körper geben müsse, hat zuerst der kön. preuss. Hr. Geh. R. v. Segner in s. zu Halle 1755 herausgegebenen Programma Specimen theoriae turbinum, gewiesen.

Aus dem Angeführten sieht man schon was für weitläuftige Rechnungen diese Untersuchungen, und Anwendungen, dadurch sie erläutert werden müßten, erfodern, daher wird man sich für gegenwärtige Einleitung mit dem, was ich hier beygebracht habe, begnügen, und dieses destomehr, weil die vollständige Ausführung in Hrn. Eulers theoria motus corp. rigidorum, von jedem, der sich meine Anleitung in gegenwärtigem Buche wohl zu Nutze gemacht hat, ohne Anstoß kann gelesen werden, wenn er nur durch grosse Rechnungen nicht ermüdet wird. Es würde also unnütz seyn, noch einiges aus Hrn. Eulers Werke beyzubringen, da dieses allemahl für kurze Anfangsgründe zu viel, und für etwas Vollständigers, wenn man nicht alles abschreiben wollte, zu wenig wäre.

BAYERISCHE STAATS- BIBLIOTHEK MUENCHEN

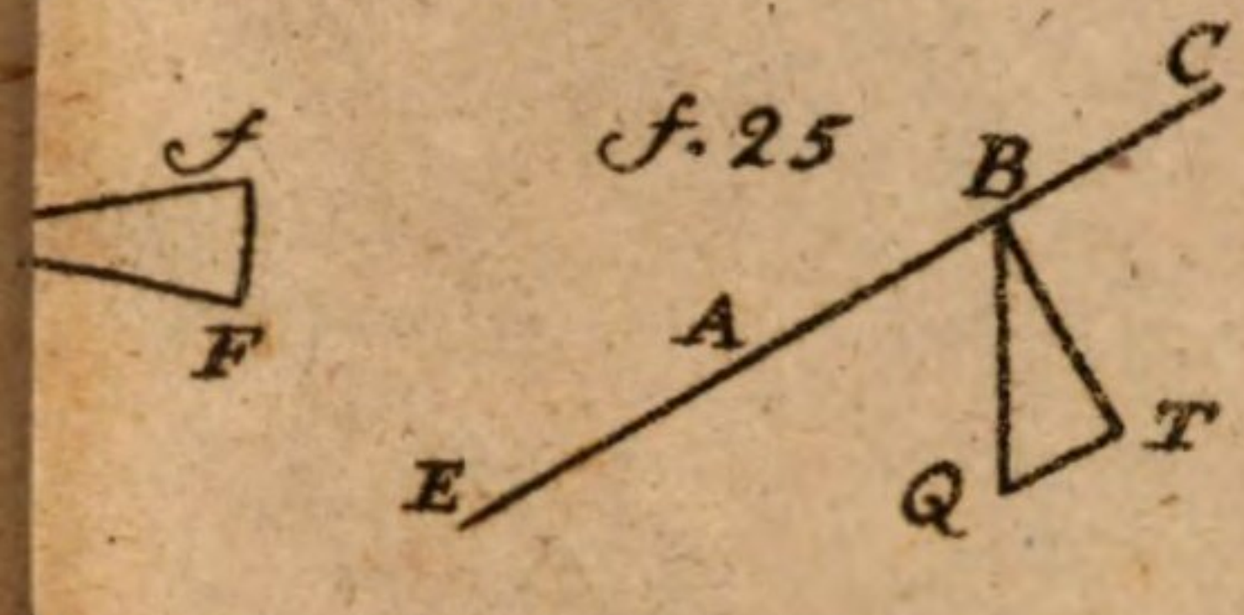

M
B
A
f. 2
F
E N P
G
H
Q
I
f. 3
R
S T
D
f. 6
C
A
B
A
Z
C
b
C
D
f. 8
H
M
f. 11
f. 12
m
M
r
T
B
b
E
n N
A
D P
C
T
H
N
B
m
D
M
r
Q
G
F
f. 10
L
K
E
B
P p

Tab. II.

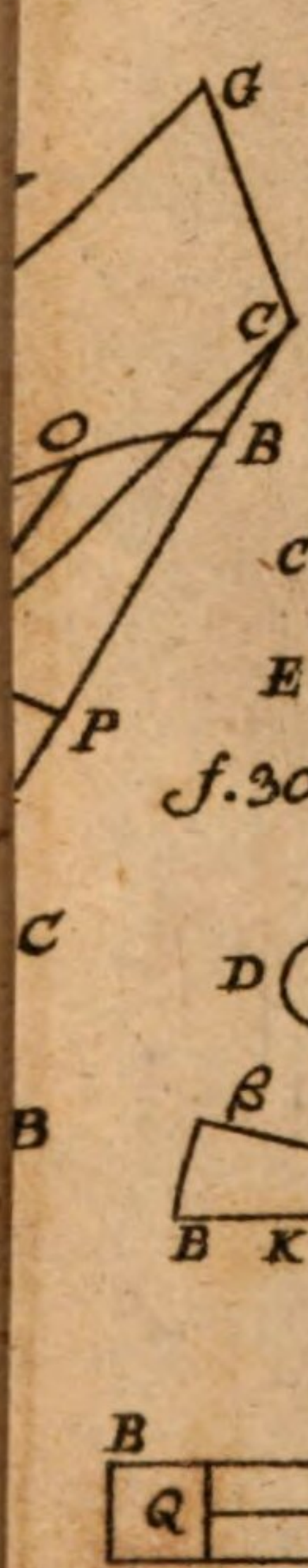

T
D
R
G
C
B
f. 14
H
A
f. 17
O
M
Q
P
B
N
F
D
C
p
P
A
f. 18
K
P
A
f. 19
K
2K
3K
P
M
N
O
H
f. 22
C
B
A
O
E
b
a
c
D
F
N

Tab. III.

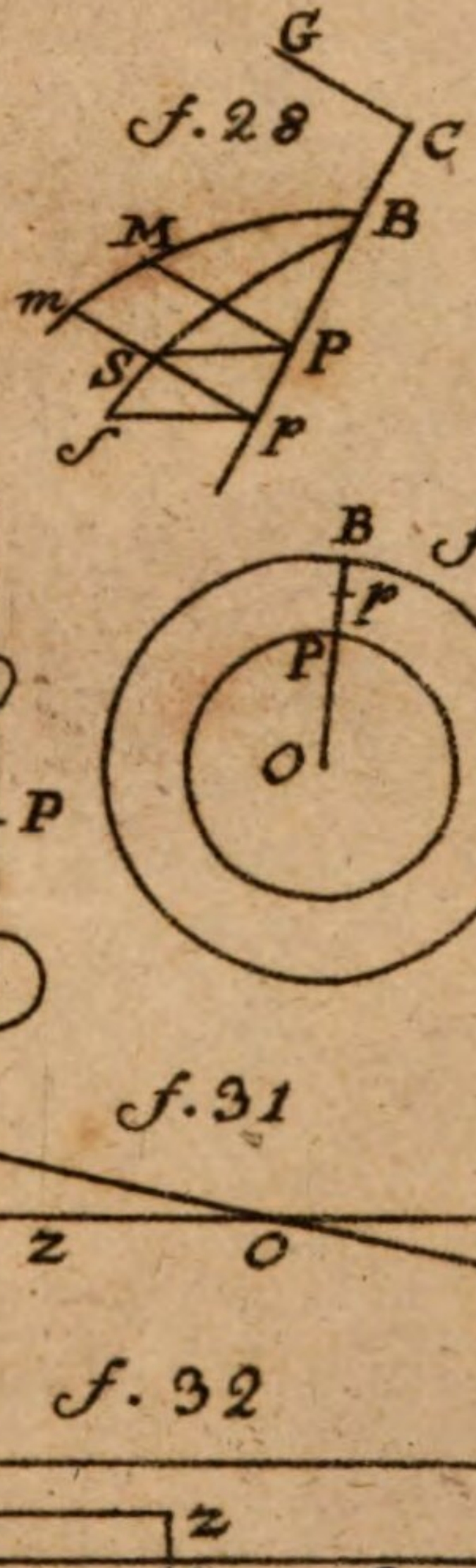
f. 25



a



f. 28

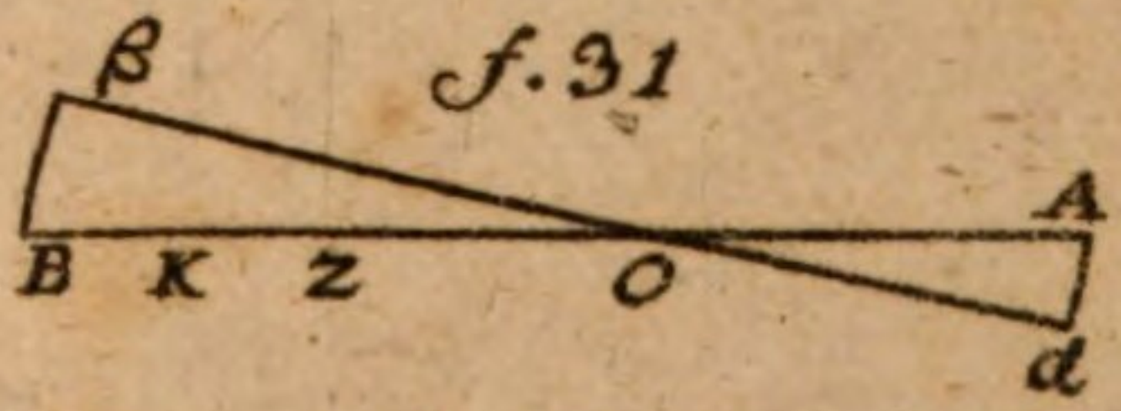


f. 30

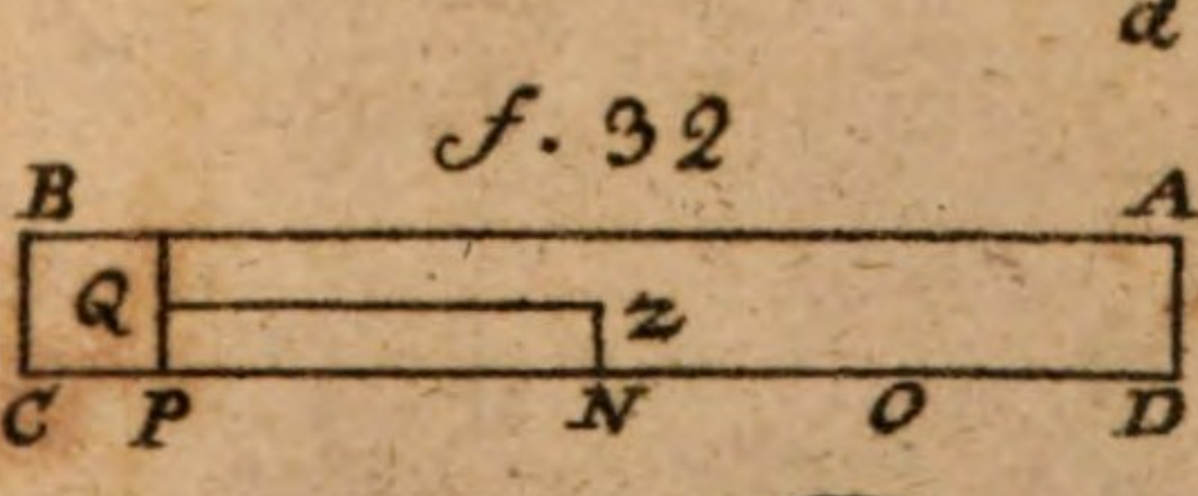
f. 34

B

f. 31



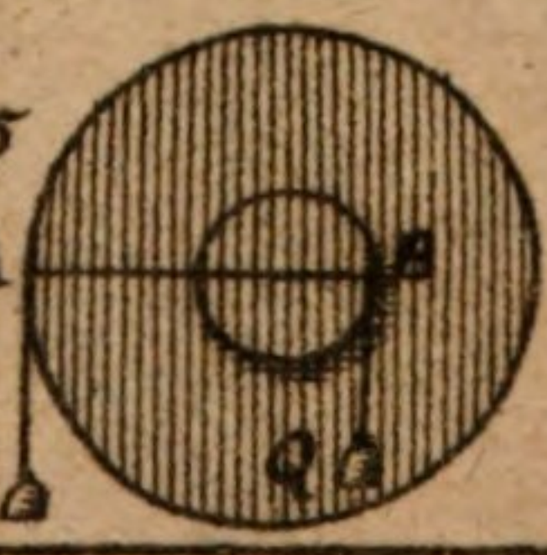
f. 32



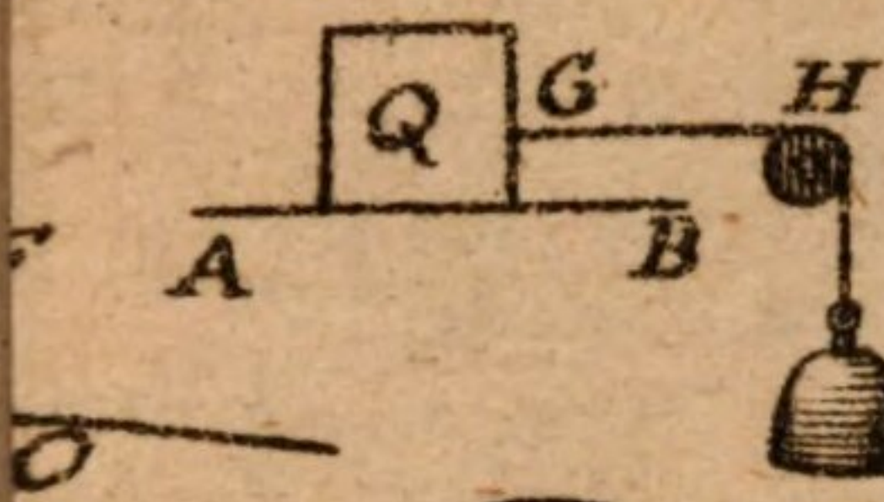
P

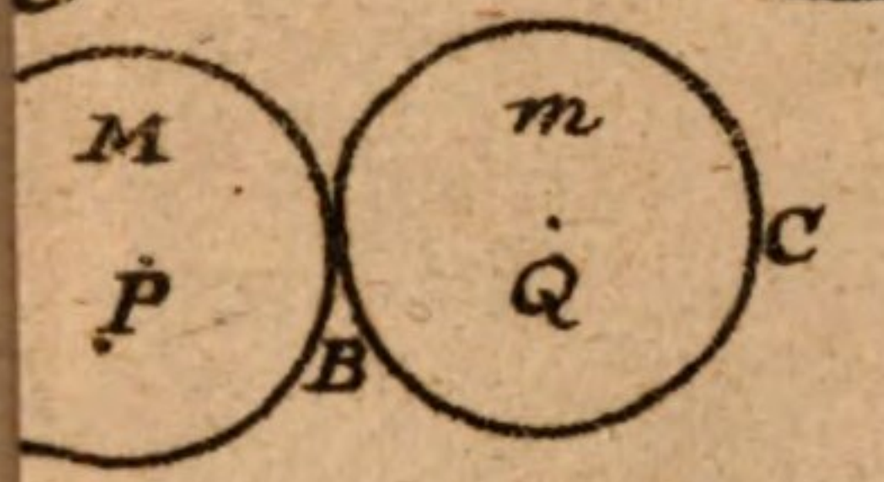
p

f. 35

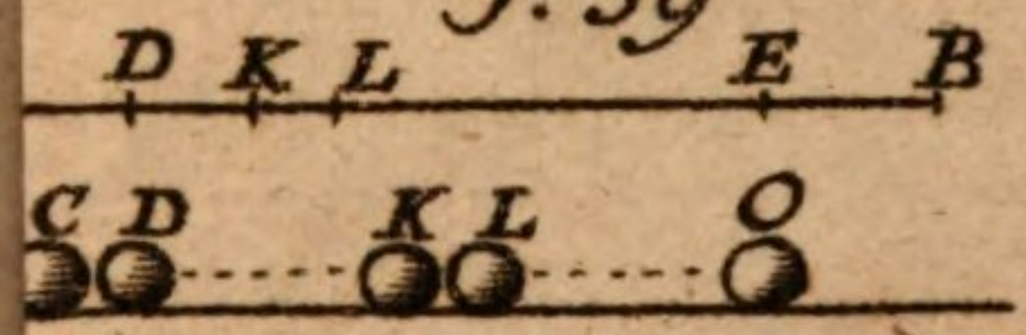


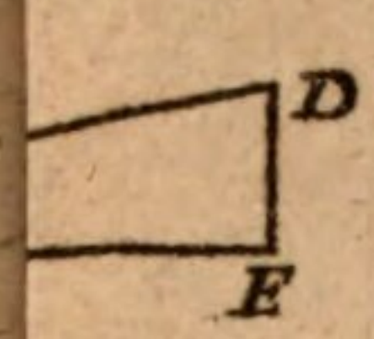
f. 36



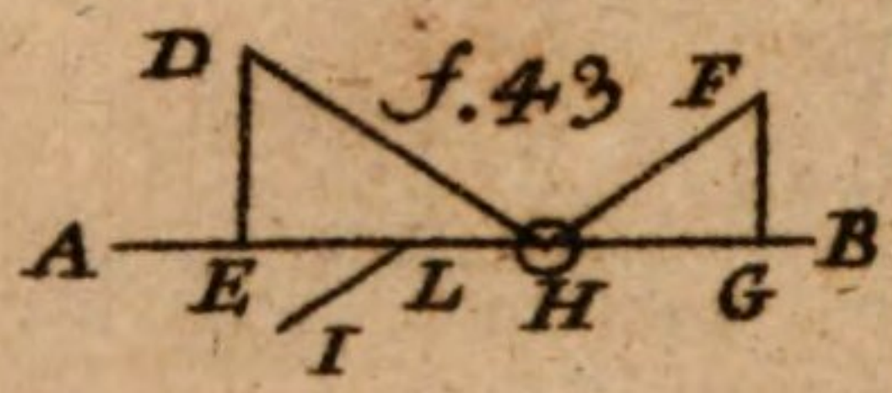


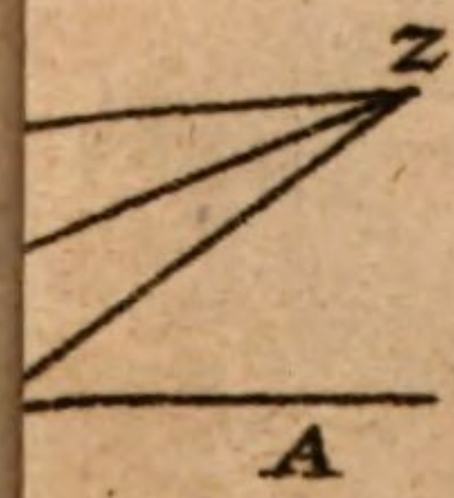
f. 39



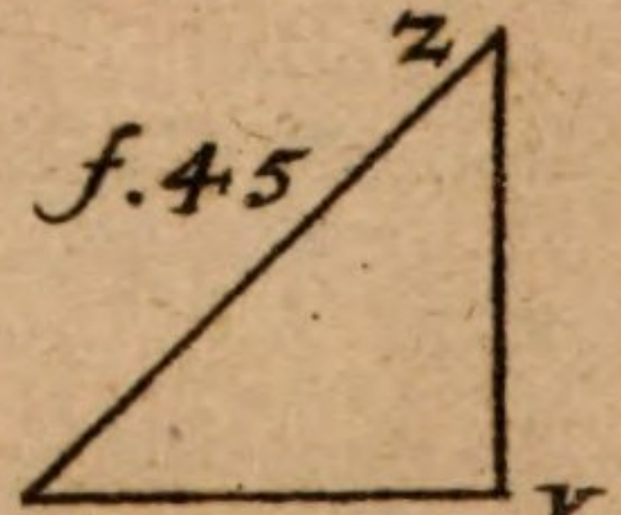


f. 43

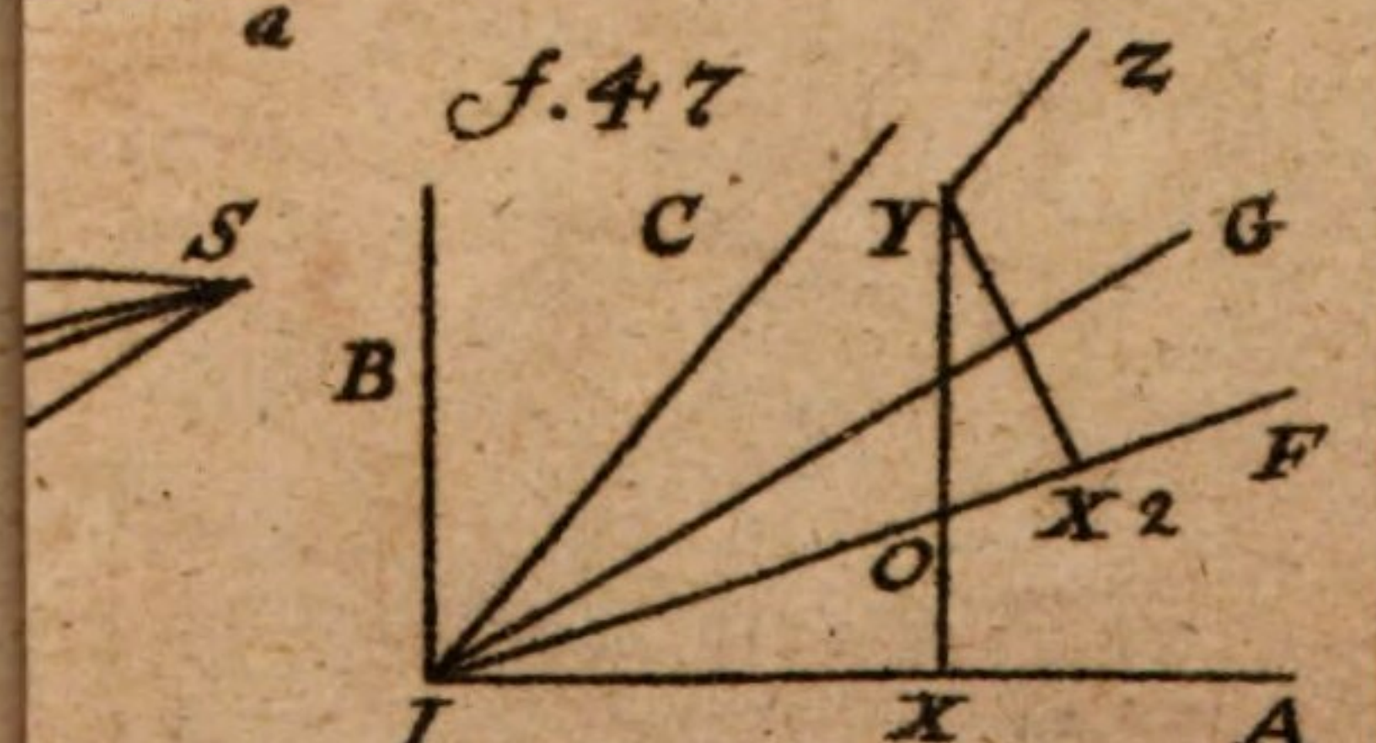




f. 45



f. 47



BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Kästner, Abraham Gotthelf, 1719-1800

Anfangsgründe der Mathematik

Bd.: 4,1

Göttingen 1766

Math.u. 77-4,1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10593984-8
VD18 80011985-001